Лабораторная работа №7

Математические модели процессов переноса частиц вещества

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
май 2025
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Аналитическое решение для уравнения переноса

Уравнение переноса является частным случаем уравнения непрерывности, когда скорость движения частиц вещества постоянная $u = \text{const}$. Построим аналитическое решение уравнения переноса в общем виде для заданной скорости движения частиц $u = u_0 = \text{const}$, и заданной начальной плотности частиц $r(x, 0) = \text{r0}(x)$.

In[1]:=
```
ClearAll[r, r0]
```

In[2]:=
```
DSolve[{D[r[x, t], t] + u0 D[r[x, t], x] == 0, r[x, 0] == r0[x]}, r[x, t], {x, t}] //
  FullSimplify
```

Out[2]=
```
{{r[x, t] → r0[x - t u0]}}
```

Построим аналитическое решение для явно заданного значения скорости движения частиц u_0 и явно заданной функции начальной плотности частиц $\text{r0}(x)$

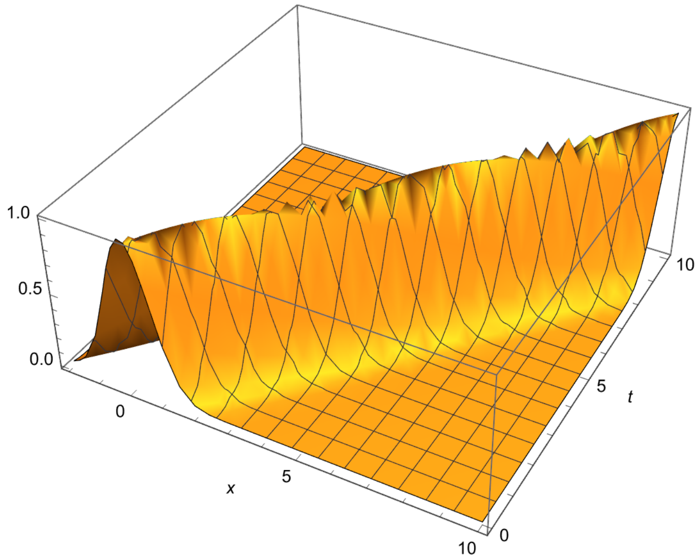
In[3]:=
```
u0 = 1; r0[x_] := e^(-x^2);
```

In[4]:=
```
r = r /. DSolve[{D[r[x, t], t] + u0 D[r[x, t], x] == 0, r[x, 0] == r0[x]}, r, {x, t}] //
    Flatten // First
```

Out[4]=
```
Function[{x, t}, e^(-(-t+x)^2)]
```

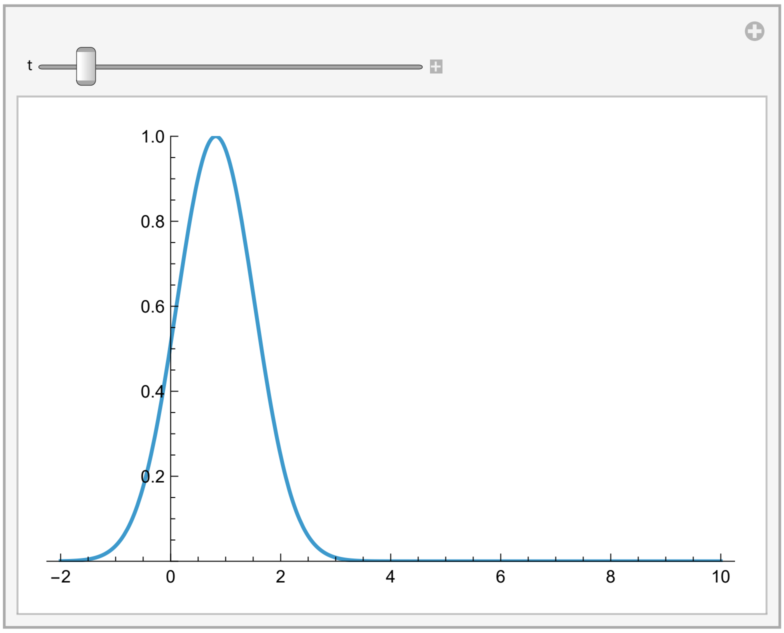
Решение представляет собой **бегущую волну** (traveling wave), т.е. волну, которая движется в пространстве без изменения формы. Для рассматриваемого примера волна движется вправо относительно системы координат (t, x), т.к. скорость движения частиц вещества положительна, $u_0 = \text{const} > 0$.

In[5]:=
```
Plot3D[r[x, t], {x, -2, 10}, {t, 0, 10}, AxesLabel → Automatic]
```

Out[5]=


Покажем, что **пространственный профиль** e^{-x^2} движется без искажений со скоростью $u_0 = 1 > 0$ вправо

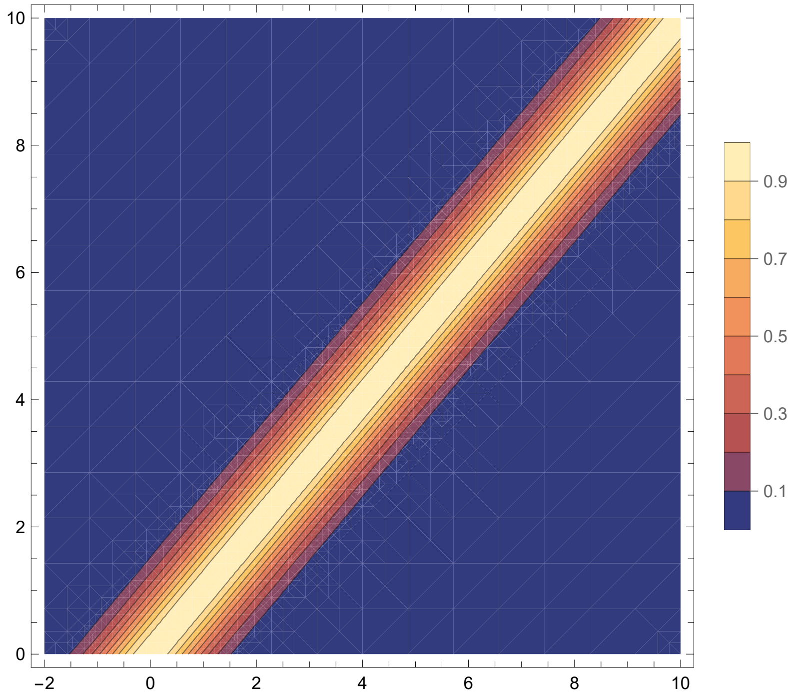
In[6]:=
```
Manipulate[Plot[r[x, t], {x, -2, 10}, PlotRange → {Automatic, {0, 1}}], {t, 0, 10}]
```

Out[6]=


Построим **характеристики или характеристические кривые**, которые являются линиями уровня для функции плотности частиц

In[7]:=
```
ContourPlot[r[x, t], {x, -2, 10}, {t, 0, 10}, PlotLegends → Automatic]
```

Out[7]=



Для уравнения переноса характеристиками являются параллельные прямые вида
$x - u_0\, t = \text{const}$

Аналитическое решение для невязкого уравнения Бюргерса

Невязкое уравнение Бюргерса является частным случаем уравнения непрерывности, когда скорость движения частиц вещества равна плотности вещества $u = \rho$. Построим аналитическое решение уравнения переноса в общем виде без задания начального условия

In[8]:=
```
ClearAll[r0]
```

In[9]:=
```
DSolve[D[r1[x, t], t] + r1[x, t] × D[r1[x, t], x] == 0, r1[x, t], {x, t}]
```

Out[9]=
```
Solve[r1[x, t] == c1[x - t r1[x, t]], r1[x, t]]
```

Определим начальное условие, которое соответствует моделированию дорожного трафика с учетом работы светофора, расположенного в точке $x = 0$, при смене цвета светофора с красного на зеленый в момент времени $t = 0$. При этом полагается, что перед светофором плотно стоят машины, а после светофора дорога пустая.

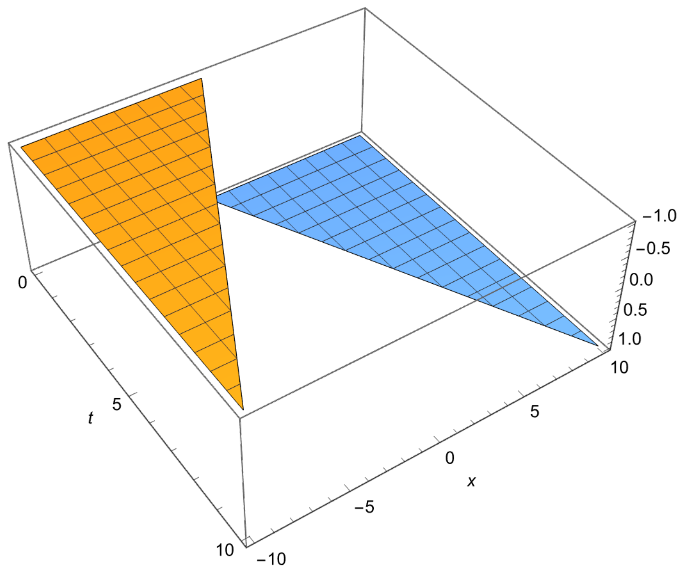
In[10]:=
```
r0[x_] := Which[x ≤ 0, -1 (*пробка*), x > 0, 1 (*пустая дорога*)];
```

In[11]:=
```
r1 = r1 /. Solve[r1 == r0[x - t r1] && t ≥ 0, r1] // FullSimplify
```

Out[11]=
```
{-1 if t > 0 && t + x < 0, 1 if 0 < t < x}
```

In[12]:=
```
Plot3D[r1, {x, -10, 10}, {t, 0, 10}, AxesLabel → Automatic]
```

Out[12]=



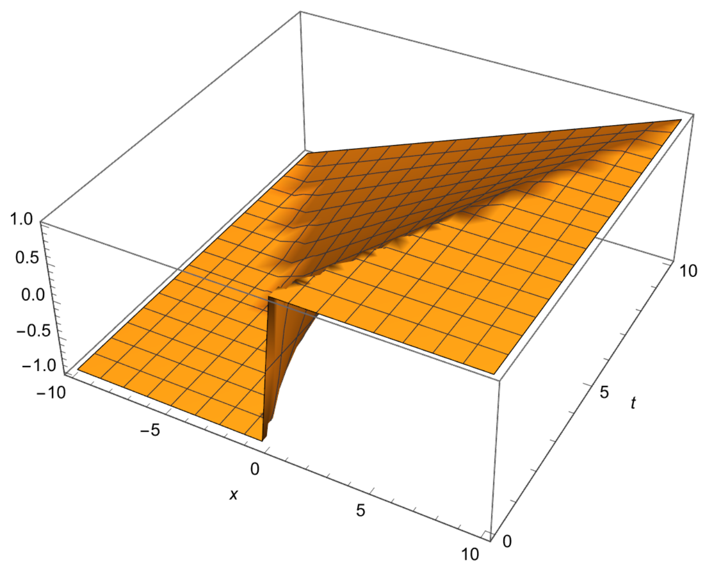
Решение является разрывным в точке $x = 0$, $t = 0$ в силу начального условия. При этом решение неопределено при $-t < x < t$.

Доопределим решение при $-t < x < t$, аппроксимируя плотность непрерывной функцией

In[13]:=
```
r2[x_, t_?NonNegative] :=
  Which[x ≤ -t, -1 (*пробка*), -t < x < t, x/t, x > t, 1 (*пустая дорога*)];
```

In[14]:=
```
Plot3D[r2[x, t], {x, -10, 10}, {t, 0, 10}, AxesLabel → Automatic]
```

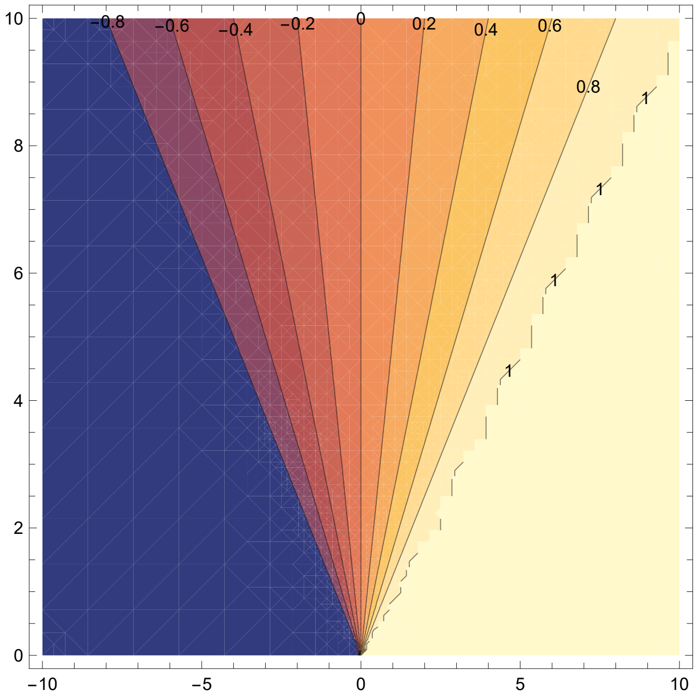
Out[14]=



Построим **характеристики или характеристические кривые**, которые являются линиями уровня для плотности

In[15]:=
```
ContourPlot[r2[x, t], {x, -10, 10}, {t, 0, 10}, ContourLabels → True]
```

Out[15]=



По графику видно, что характеристические линии являются прямыми линиями для $-1 < \rho < 1$ и пересекаются в точке при $x = 0$, $t = 0$. В отличие от невязкого урвнения Бюргера в уравнении переноса характеристические линии всегда являются параллельными прямыми.

Задание 1. Перенос загрязнения в притоке реки

Содержательная постановка задачи

[1, раздел 4.1 стр. 93--97] В притоке реки за 10^4 м до впадения притока в реку происходит выброс частиц химического вещества в воду в течение 5 мин. Начальное содержание частиц химического вещества в воде составляет 10%, т.е. плотность субстанции в воде равна 0.1 $(\text{мин} * \text{м})^{-1}$ в период выброса. Скорость движения частиц вещества в месте выброса определяется скоростью движения воды и равна 60 м/мин. Приток расширяется и скорость движения воды падает на 20% в месте впадения притока в реку. Дополнительно нужно учесть, что каждую минуту 1% химического вещества оседает на дно. Необходимо описать и проанализировать процесс переноса химического вещества в притоке реки.

Концептуальная постановка задачи

- Приток реки описывается прямой линией. Совмещаем ось Ox с направлением движения воды в притоке реки. Полагаем, что выброс химического вещества осуществляется в точке $x = -a$, и за 5 мин химическое вещество с плотностью $\gamma = 0.1$ $(\text{мин} * \text{м})^{-1}$ заполняет отрезок $[-a, 0]$ притока реки. С учетом того, что скорость движения частиц вещества в момент выброса $u_0 = 60$ м/мин, не учитывая расширения притока в течении 5 мин, имеем, что $a = u_0 * 5$ мин $= 300$ м. Обозначим через $x = L$ место впадения притока в реку. По условию задачи $L = 10^4$ м.

- Полагаем, что плотность химического вещества описывается функцией $\rho = \rho(x, t)$, где $0 \le x \le L$ соответствует моделированию движения только в притоке реки .
- Полагаем, что выброс химического вещества заканчивается в момент времени $t = 0$. Тогда начальное условие $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ для плотности химического вещества задается следующей функцией: $\rho_0(x) = \gamma$ для $x \in [-a, 0]$ и $\rho_0(x) = 0$ для $x \ge 0$.
- Из-за расширения притока скорость движения частиц u будет зависеть от x. Известно, что в точке $x = 0$ скорость $u(x) = u_0$ и при $x = L$ скорость потока падает на 20%. Тогда можно построить зависимость $u(x) = u_0(1 - \alpha\, x)$, где $\alpha = \frac{0.2}{L}$ м$^{-1}$, $x \ge 0$.
- Оседание химической субстанции на дно реки задается дополнительным слагаемым $\sigma\, \rho(x, t)$ в левой части уравнения непрерывности, где $\sigma = 0.01$ мин$^{-1}$.

Задание 1.1 (Математическая модель)

Постройте математическую модель переноса частиц химического вещества в притоке реки для $0 \le x \le L$ и $t \ge 0$ на основе концептуальной постановки задачи.

Задание 1.2 (Аналитическое решение)

Постройте аналитическое решение математической модели из Задания 1.1 с помощью метода характеристик.

Сравните постронное аналитическое решение с аналитическим решением, полученным с помощью функции **DSolve**.

Задание 1.3 (Время впадения химического вещества в реку)

Оцените временной интервал, в течение которого химическое вещество будет попадать в реку. Для этого по аналитическому решению для плотности химического вещества, построенному в Задании 1.2, необходимо найти временной интервал, при котором плотность химического вещества в месте впадения притока в реку положительна, $\rho(x = L, t) > 0$.

Сравните с результатом из [1, раздел 4.1 стр. 93--97], 186 мин $\le t^* \le$ 191 мин.

Задание 1.4 (Количество вещества, которое попадет в реку)

Количество химического вещества, попавшего в приток реки в месте выброса, вычисляется по формуле $\int_0^{5\,\text{мин}} \gamma\, dt = 0.5$ м$^{-1}$.

Вычислите количество химического вещества, которое попадет в реку. Для этого необходимо вычислить интеграл по времени от функции плотности в месте впадения притока в реку $\rho(L, t)$ по временному интервалу из Задания 1.3.

Вычислите, какое количество химического вещества осядет на дно до момента впадения в реку?

Задание 2. Перенос загрязнения в сужающемся притоке реки

Выполните Задания 1.1--1.4 при изменении одного из условий в концептуальной поставке задачи: приток реки сужается и скорость движения воды увеличивается на 20% в месте впадения притока в реку.

Задание 3. Моделирование дорожного трафика

Дорожный трафик можно описывать с помощью уравнения непрерывности для плотности автомобилей $\rho(x, t)$ в предположении движения автомобилей по прямой линии и заданной скорости движения автомобилей, которая зависит только от плотности автомобилей $v(\rho) = v_{\max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$.

В безразмерных переменных математическая модель записывается в виде невязкого уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

и начального условия

$\rho(x, 0) = \rho_0(x)$.

Отметим, что в безразмерных переменных плотность автомобилей изменяется от -1 до 1, $-1 \leq \rho(x, t) \leq 1$, где значение $\rho = -1$ соответствует пробке на дороге, $\rho = 0$ -- умеренному трафик, $\rho = 1$ -- пустой дороге.

Задание 3.1 (Аналитическое решение)

Постройте аналитическое решение математической модели для невязкого уравнения Бюргерса с помощью метода характеристик для начального условия вида

$\rho_0(x) = 1$ при $x < 0$, (* пустая дорога *)

$\rho_0(x) = 1 - x$ при $0 \leq x \leq 1$,

$\rho_0(x) = 0$ при $x > 1$. (* умеренный трафик *)

Изобразите график плотности автомобилей, используя построенное аналитическое решение.

Предложите физическую интерпретацию построенного решения.

Задание 4. Двусолитонные решения Кортевега-де Фриза

Солитон -- это уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость при движении и столкновении с себе подобными уединенными волнами.

Уравнение Кортевега-де Фриза (построено в 1895 году)

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + 6\, u(x,t)\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

описывает отклонение свободной поверхности воды от положения равновесия при определенных предположениях. В частности, *волна должна быть длинной*, т.е. длина волны существенно больше глубины слоя воды.

Двусолитонное решение уравнения Кортевега-де Фриза строится по формуле, см., например, [3, стр. 580]

$$u(x,t) = 2\,\frac{\partial^2 \log(F(x,t))}{\partial x^2},\; F(x,t) = 1 + f_1(x,t) + f_2(x,t) + A\, f_2(x,t)\, f_1(x,t), \qquad (2)$$

где $f_i(x,t) = e^{\theta_i(x,t)}$, $\theta_i(x,t) = -t\,a_i^3 + x\,a_i + \delta_i$, $A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$.

Задание 4.1 (Аналитическое односолитонное решение)

Постройте аналитическое решение уравнения Кортевега-де Фриза с помощью функции **DSolve**.

Продемонстрируйте, что пространственный профиль решения урвнения сохраняется во времени, т.е. решение представляет собой бегущую волну.

Задание 4.2 (Аналитическое двусолитонное решение)

Покажите, что аналитическое решение вида (2) удовлетворяет уравнению Кортевега-де Фриза (1).

Задание 4.3 (Столкновение двух солитонов)

Осуществите динамическую визуализацию двусолитонного решения уравнения Кортевега-де Фриза при различных значениях параметров a_1, a_2, δ_1, δ_2.

Подберите значения параметров, соответствующие столкновению двух солитонов.

Продемонстрируйте, что пространтсвенный профиль каждого из солитонов сохраняется после их столкновения.

Задание 5 (необязательное). Моделирование дорожного трафика в туннеле

[2, стр. 253] Дорожный трафик в туннеле можно описывать с помощью уравнения непрерывности для плотности автомобилей $\rho(x,t)$ в предположении движения по прямой линии и заданной скорости потока, зависящей от плотности $V(\rho) = v_{\max}$ при $0 \le \rho \le \rho_c$ и

$v(\rho) = \frac{v_{max} \log\left(\frac{\rho_{max}}{\rho}\right)}{\log\left(\frac{\rho_{max}}{\rho_c}\right)}$ при $\rho_c \leq \rho \leq \rho_{max}$.

Полагаем, что въезд в туннель расположен в точке $x = 0$ и автомобили при максимальной плотности ожидают открытия туннеля в момент времени $t = 0$.

$\rho_0(x) = \rho_{max}$ при $x < 0$,

$\rho_0(x) = 0$ при $x > 0$.

Задание 5.1 (Математическая модель)

Сформулируйте математическую модель задачи о дорожном трафике в туннеле.

Задание 5.2 (Аналитическое решение)

Постройте аналитическое решение математической модели, сформулированной в Задании 5.1.

Изобразите график плотности автомобилей для заданных значений параметров:
$\rho_c = 7$ машин / км, $\rho_{max} = 110$ машин / км, $v_{max} = 90$ км / ч.

Литература

[1] A. Juengel. Mathematische Modellierung mit Differentialgleichung, Vorlesungsskript, 2003.

[2] S. Salsa. Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory, Springer, 2016.

[3] G.B. Whitham. Linear and Nonlinear Waves, Wiley, 1999.