

Лабораторная работа №5

Математические модели с запаздыванием

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
апрель 2025
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. Метод последовательного интегрирования

Напишите пользовательскую функцию **solveDelay[f_, T_, {t0_, tend_}, phi_]**, которая реализует метод последовательного интегрирования (метод шагов) для численного решения начальной задачи для одного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(t-T)), & t_0 < t \leq t_{\text{end}} \\ x(t) &= \phi(t), & t_0 - T \leq t \leq t_0 \end{aligned} \quad (1)$$

где $T = \text{const} > 0$ определяет величину запаздывания, начальная функция $\phi(t)$ полагается заданной на начальном множестве $I_0 := [t_0 - T, t_0]$.

Рекомендации по выполнению Задания 1

Используйте функцию **NDSolve** или **NDSolveValue** для решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения без запаздывания на каждом шаге метода последовательного интегрирования.

Реализация последовательности шагов возможна с помощью оператора повторных действий **NestList** и функции **Piecewise** для представления кусочной гладкой функции решения $x(t)$ на интервалах $I_k := [t_0 + (k-1)T, t_0 + kT]$, $k = 0, 1, 2, \dots$

In[]:= ? NestList

Out[]:=

Symbol i

NestList[f, expr, n] gives a list of the results of applying f to expr 0 through n times.

▼

? Piecewise

Piecewise[{{val₁, cond₁}, {val₂, cond₂}, ...}] represents a

piecewise function with values val_i in the regions defined by the conditions cond_i.

Piecewise[{{val₁, cond₁}, ...], val] uses default value val if none of the cond_i apply. The default for val is 0. >>

Задание 2. Линейное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом вида

$$x'(t) = -\frac{\pi x(t-T)}{2T}. \quad (2)$$

Задание 2.1 (Аналитическое решение)

Покажите с помощью символьных преобразований в *Mathematica*, что функция $x(t) = C \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$ является решением уравнения (2) для произвольного значения константы C и заданного значения параметра запаздывания $T = \text{const} > 0$.

Задание 2.2 (Численное решение)

Сформулируйте произвольную начальную задачу для уравнения с запаздывающим аргументом (2).

Решите численно сформулированную начальную задачу с помощью пользовательской функции **solveDelay** из Задания 1 и с помощью встроенной функции **NDSolve**. **Сравните** два численных решения графически и численно.

Рекомендации по выполнению Задания 2.2

Пример из справочной системы *Mathematica* применения встроенной функции **NDSolve** для решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

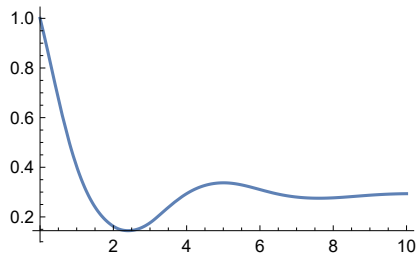
```
In[*]:= T = 2;
```

```
In[*]:= sol =
```

```
NDSolve[{x'[t] == x[t] (x[t - Pi] - x[t - T]), x[t /; t ≤ 0] == Cos[t]}, x, {t, 0, 10 T}];
```

```
In[ ]:= Plot[Evaluate[x[t] /. First@First@sol], {t, 0, 5 T}, PlotRange -> All]
```

```
Out[ ]:=
```



Задание 3. Начальная задача для уравнения Хатчинсона

Математическая модель

Рассмотрим начальную задачу для уравнения Хатчинсона в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} N(t) &= M(t)(1 - M(t - T)), & t > 0 \\ M(t) &= \phi(t), & -T \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где начальная функция $\phi(t) = 1 + \frac{t}{T}$ задана на начальном множестве $I_0 = [-T, 0]$, параметр запаздывания $T = \text{const} > 0$.

Задание 3.1 (Численное решение)

Изобразите в одной системе координат графики решений $M(t)$ модели Хатчинсона (3), построенные с помощью пользовательской функции **solveDelay** из Задания 1 для различных значений T . Рассмотрите случаи $0 < T < \frac{\pi}{2}$, $T = \frac{\pi}{2}$, $T > \frac{\pi}{2}$.

Проверьте корректность построенных численных решений сравнением с решениями модели Хатчинсона (3), полученными с помощью **NDSolve**.

Задание 3.2 (Качественное поведение)

На основании построенных графиков решений в Задании 3.1 **сформулируйте выводы** о характере устойчивости положения равновесия $M(t) \equiv 1$ модели Хатчинсона (3) для случаев $0 < T < \frac{\pi}{2}$, $T = \frac{\pi}{2}$, $T > \frac{\pi}{2}$.

Задание 4. Математическая модель регуляции концентрации клеток крови

Математическая модель

$$\begin{aligned} c'(t) &= \frac{\lambda a^m c(t-T)}{a^m + (c(t-T))^m} - g c(t), \quad t > 0 \\ c(t) &= \phi(t), \quad -T \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где $c(t) \geq 0$ -- концентрация клеток крови, $T = \text{const} > 0$ -- временная задержка в воспроизводстве новых клеток крови и поступлении их в кровоток,

$\lambda = \text{const} > 0$, $a = \text{const} > 0$, $m = \text{const} > 0$, $g = \text{const} > 0$ -- заданные параметры модели. Первое слагаемое в правой части уравнения отвечает за воспроизводство клеток, второе слагаемое -- за гибель клеток.

Математическая модель (4) впервые предложена в [3].

При обезразмеривании концентрации вида $c^* = c/a$ уравнение модели (4) запишется в виде

$$\frac{d c^*(t)}{d t} = \frac{\lambda c^*(t-T)}{1 + (c^*(t-T))^m} - g c^*(t). \quad (5)$$

Задание 4.1 (Численное решение)

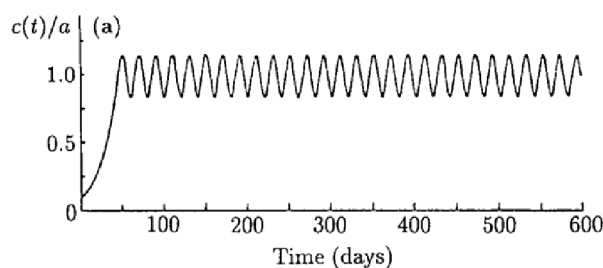
Решите численно начальную задачу для уравнения (5) с помощью пользовательской функции **solveDelay** для следующих значений параметров, соответствующих процессу регуляции лейкоцитов,

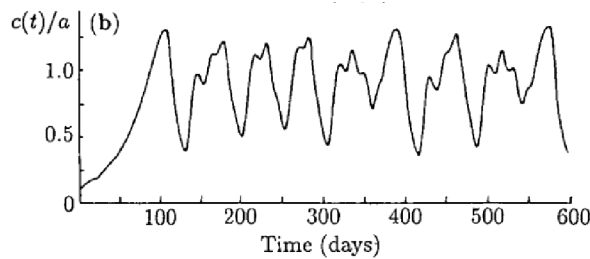
- (a) $\lambda = 0.2 \text{ день}^{-1}$, $m = 10$, $g = 0.1 \text{ день}^{-1}$, $T = 6$ дней,
- (b) $\lambda = 0.2 \text{ день}^{-1}$, $m = 10$, $g = 0.1 \text{ день}^{-1}$, $T = 20$ дней

и для начальной функции $\phi(t) = 0.1$, заданной на начальном множестве $I_0 = [-T, 0]$, при $0 \leq t \leq 600$ дней.

Анализируя уравнение (5), **покажите**, что одним из положений равновесия для параметров (a) и (b) является решение вида $c^*(t) \equiv 1$.

Сравните построенные численные решение с приведенными ниже решениями из [1, стр. 62, Рис. 1.15] для случаев (a) и (b), соответственно.





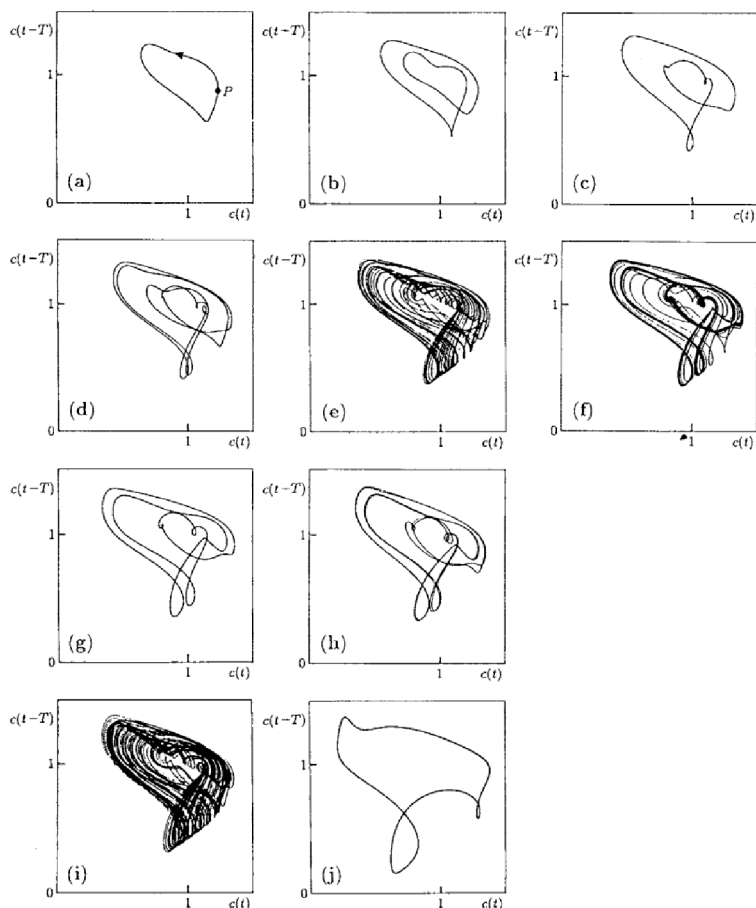
По графикам численных решений видно, что величина запаздывания T в воспроизводстве лейкоцитов влияет на динамику изменения концентрации: периодическое изменение концентрации при $T = 6$ или аperiodическое изменение концентрации при $T = 20$. Шестидневный период ($T = 6$) является нормой для изменения концентрации лейкоцитов в крови человека. Увеличение периода приводит к аperiodическому изменению концентрации и может являться причиной нарушений здоровья и заболеваний человека.

Задание 4.2 (Фазовый портрет)

Качественное поведение решения для рассматриваемой модели регуляции концентрации клеток крови (периодическое поведение или аperiodическое поведение) можно определить по траекториям в фазовой плоскости $(c(t), c(t - T))$.

Изобразите фазовые траектории решений начальной задачи для уравнения (5) при фиксированных значениях параметров $\lambda = 2$, $g = 1$, $T = 2$ и различных значениях параметра $m = \{7, 7.75, 8.5, 8.79, 9.65, 9.69715, 9.6975, 9.76, 10, 20\}$. Начальная функцию $\phi(t) = 0.9$ на начальном множестве $I_0 = [-T, 0]$.

Сравните с аналогичными фазовыми траекториями численных решений из [1, стр. 65, Рис. 1.16] и [3, Рис. 6].



На основании построенных фазовых траекторий **сформулируйте выводы** о качественном поведении решения математической модели для уравнения (5) в окрестности положения равновесия $c(t) \equiv 1$ для различных значений параметра m .

Рекомендации по выполнению Задания 4.2

Для построения фазового портрета можно воспользоваться примером Mackey-Glass delay differential equation из справочной системы *Mathematica* для функции **NDSolve**.

Литература

- [1] Д. Мюррей. Математическая биология. Том I. Введение. -- М.-Ижевск, 2009.
- [2] Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. -- М.: Наука, 1971.
- [3] L. Glass, M. C. Mackey. Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems. Ann. N. Y. Acad. Sci., 316:214--235, 1979.
- [4] А. Д. Мышкис. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. -- М.: Наука, 1972.
- [5] Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков. Математические модели динамических систем с

запаздыванием. -- Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2012.