

# Лабораторная работа №4

## Математические модели распространения инфекционных заболеваний

Мат. моделирование динамических процессов 1

БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр

специальность Компьютерная математика и системный анализ

март 2025

ММФ, КМиСА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

### Задание 1. SIR-модель

#### Математическая модель

Математическая модель представляет собой задачу Коши для системы из трех согласованных ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -rSI, \\ \frac{dI}{dt} &= rSI - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I, \\ S(0) &= N - I_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $S(t) + I(t) + R(t) \equiv N = \text{const} > 0$ ;  $r = \text{const} > 0$  -- коэффициент инфицирования;  $\alpha = \text{const} > 0$  -- коэффициент выздоровления.

#### Задание 1.1 (Пороговый эффект)

**Изобразите** графики функций  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  решения SIR-модели (1) для популяции с численностью  $N = 10^7$  с интерактивным управлением значениями параметров модели  $0 < r < 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $I_0 < N$  и с отображением значения базового репродуктивного числа  $R_0 = \frac{r}{\alpha} (N - I_0)$ , соответствующего выбранным значениям параметров.

Дополнительно в интерактивном объекте **изобразите** одну фазовую траекторию, соответствующую решению SIR-модели для выбранных параметров, в фазовой  $S/I$ -плоскости. Фазовую траекторию можно построить с помощью функции **StreamPlot** и опции **RegionFunction** для выделения треугольной области  $0 \leq S + I \leq N$ , а также опции **StreamPoints** для явного указания точки  $(N - I_0, I_0)$ , принадлежащей траектории.

Дополнительно в интерактивном объекте **изобразите** фазовую траекторию, соответствующую решению SIR-модели для выбранных параметров, в фазовом  $S/R$ -пространстве. Фазовую траекторию можно построить с помощью функции **ParametricPlot3D**.

**Продемонстрируйте** на построенных графиках пороговый эффект: Вспышка эпидемии в популяции происходит тогда и только тогда, когда  $R_0 \geq 1$ . В противном случае распространение инфекции не приводит к эпидемии и инфекция исчезает в популяции.

## Задание 1.2 (Учет вакцинации)

**Продемонстрируйте** на графиках эффективность вакцинации, т.е. что эпидемия не возникает в том случае, если будет вакцинирована доля  $p$  от всей численности популяции, где  $p > p^* = 1 - \frac{1}{R_0}$ . Для учета вакцинации в математической модели (1) определяем начальные данные в следующем виде:  $S(0) = (1 - p)N - I_0$ ,  $R(0) = pN$ . Для моделирования полагаем также, что  $I_0 = 0.01N$ .

## Задание 1.3 (Коллективный иммунитет)

На основании SIR-модели **вычислите** минимальное значение доли  $p^*$  от численности популяции для вакцинации, которая позволила бы избежать эпидемии (создать коллективный иммунитет) в следующих конкретных случаях:

- эпидемия гриппа H3N2 в Гонконге в 1968-1969 гг. [https://en.wikipedia.org/wiki/Hong\\_Kong\\_flu](https://en.wikipedia.org/wiki/Hong_Kong_flu) : число контактов в день -- 6, продолжительность болезни -- 3 дня;
- эпидемия кори в Калифорнии в 2014-2015 гг.: число контактов в день -- 18, продолжительность болезни -- 8 дней.

Для расчетов используйте следующую информацию:

коэффициент инфицирования  $r$  равен отношению числа контактов в единицу времени к размеру популяции и к периоду продолжительности болезни; коэффициент выздоровления  $\alpha$  равен обратной величине к периоду продолжительности болезни.

**Вычислите** также в процентах отношение максимального количества инфицированных особей  $I(t)$  без проведения вакцинации к численности всей популяции. Для вычисления максимального количества инфицированных особей используйте формулу из лекции.

# Задание 2. Модель с учетом рождаемости и смертности

## Математическая модель

Математическая модель представляет собой задачу Коши для системы из трех согласованных ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -rSI + aN - bS, \\ \frac{dI}{dt} &= rSI - \alpha I - bI, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I - bR, \end{aligned} \tag{2}$$

$$S(0) = N_0 - I_0, I(0) = I_0, R(0) = 0,$$

где  $S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$ ;  $r = \text{const} > 0$  -- коэффициент инфицирования;  $\alpha = \text{const} > 0$  -- коэффициент выздоровления;  $a = \text{const} > 0$  -- коэффициент рождаемости;  $b = \text{const} > 0$  -- коэффициент смертности.

## Задание 2.1 (Пороговый эффект)

**Изобразите** графики функций  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  решения математической модели (2), а также график функции  $N(t)$  для популяции с начальной численностью  $N_0 = 10^7$  с интерактивным управлением значениями параметров модели  $0 < r < 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ ,  $I_0 < N_0$  и с отображением значения базового репродуктивного числа  $R_0 = \frac{r}{\alpha + b} (N_0 - I_0)$ , соответствующего выбранным значениям

параметров.

**Изобразите** фазовую траекторию, соответствующую решению модели для выбранных параметров, в фазовом  $S/I/R$ -пространстве.

**Продемонстрируйте** на графиках пороговый эффект: Вспышка эпидемии в популяции происходит тогда и только тогда, когда  $R_0 \geq 1$ . В противном случае распространение инфекции не приводит к эпидемии и инфекция исчезает в популяции.

## Задание 2.2 (Качественный анализ динамики распространения заболевания)

**Сравните** по графикам качественное поведение решений для случаев  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $a > b$  и **сделайте выводы**.

## Задание 3. Модель с учетом инкубационного периода

### Математическая модель

Математическая модель представляет собой задачу Коши для системы из четырех согласованных ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -rSI, \\ \frac{dE}{dt} &= rSI - bE, \\ \frac{dI}{dt} &= -\alpha I + bE, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I, \end{aligned} \tag{3}$$

$$S(0) = N - I_0, E(0) = 0, I(0) = I_0, R(0) = 0,$$

где  $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) \equiv N = \text{const} > 0$ ;  $r = \text{const} > 0$  -- коэффициент инфицирования;  $\alpha = \text{const} > 0$  -- коэффициент выздоровления;  $b = \text{const} > 0$ .

### Задание 3.1 (Пороговый эффект)

**Изобразите** графики функций  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  решения SEIR-модели (3) для популяции с численностью  $N = 10^7$  с интерактивным управлением значениями параметров модели  $0 < r < 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < b < 1$ ,  $I_0 < N$ .

### Задание 3.2 (Качественный анализ динамической системы)

**Проанализируйте** устойчивость положения равновесия динамической системы  $(S^*, 0, 0, N - S^*)$ , где  $0 \leq S^* \leq N$  по собственным значениям линеаризованной динамической системы. Устойчивость положения равновесия, т.е. действительные части собственных значений линеаризованной динамической системы меньше нуля, будет соответствовать отсутствию эпидемии. На основании анализа устойчивости положения равновесия найдите базовое репродуктивное число SEIR-модели (3).

**Продемонстрируйте** пороговый эффект на графиках, построенных в Задании 3.1: Вспышка эпидемии в популяции происходит тогда и только тогда, когда  $R_0 \geq 1$ . В противном случае распространение инфекции не приводит к эпидемии и инфекция исчезает в популяции.

### Задание 3.3 (Оценка влияния инкубационного периода заболевания)

**Сделайте выводы** о качественном изменении динамики распространения заболевания при наличии инкубационного периода заболевания на основании сравнения результатов для SIR-модели (1) и SEIR-модели (3): длительность эпидемии, максимальное значение инфицированных, общее количество инфицированных, значение базового репродуктивного числа, устойчивость положений равновесия, поведение при  $t \rightarrow \infty$ .

---

## Литература

- [1] Д. Мюррей. Математическая биология. Том I. Введение. -- М.-Ижевск, 2009.
- [2] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. -- 2011.
- [3] B. Barnes, G. R. Fulford. Mathematical Modelling with Case Studies: A differential equation approach using Maple and MATLAB. Second Edition, CRC Press, 2008.
- [4] **Дополнительные материалы для выполнения ЛБ4 на Python:** [https://nbviewer.org/github/jckantor/CBE30338/blob/master/notebooks/03.09-COVID-19.ipynb?fbclid=IwAR2t1Cqo1RI44wEvPB5qkPaADjN-cl\\_119ZcE\\_X7Yev5xq3q\\_CDex3bxQkRY](https://nbviewer.org/github/jckantor/CBE30338/blob/master/notebooks/03.09-COVID-19.ipynb?fbclid=IwAR2t1Cqo1RI44wEvPB5qkPaADjN-cl_119ZcE_X7Yev5xq3q_CDex3bxQkRY)