

Лабораторная работа №3

Нелинейные математические модели колебательных явлений

Мат. моделирование динамических процессов 1

БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр

специальность Компьютерная математика и системный анализ

март 2025

ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. Математический маятник под действием силы тяжести без учета сопротивления среды

Концептуальная постановка задачи

- Объектом исследования является физическое тело массы m , которое подвешено на конце невесомого и нерастяжимого стержня длины l к неподвижной опоре. Тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной стержня, поэтому принимаем его за материальную точку.
- Тело качается в фиксированной вертикальной плоскости. Обозначим через $\alpha(t)$ угол отклонения стержня от вертикального положения равновесия $\alpha(t) = 0$. Будем считать, что $\alpha(t) > 0$ при отклонении стержня против часовой стрелки.
- Тело находится под действием силы тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$; силой сопротивления среды пренебрегаем. Допущение об отсутствии трения справедливо для небольших промежутков времени моделирования.

```
In[*]:= g = QuantityMagnitude@  
WolframAlpha["Gravitational acceleration value", {"Value", 1}, "QuantityData"]  
  
Out[*]=  
9.807
```

Принимая во внимание, что в момент времени $t = 0$ стержень отклонили на угол α_0 и телу сообщили угловую скорость ω_0 , требуется определить угол отклонения стержня $\alpha(t)$ как функцию времени.

Математическая модель

Математическая модель представляет собой задачу Коши для нелинейного однородного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\alpha(t)) &= 0, \\ \alpha(0) &= \alpha_0, \\ \frac{d\alpha(0)}{dt} &= \omega_0. \end{aligned} \tag{1}$$

В случае малых колебаний маятника математическая модель (1) упрощается за счет допущения, что $\sin(\alpha) \approx \alpha$ при $\alpha \ll 1$ и сводится к модели гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha(t) = 0,$$

$$\alpha(0) = \alpha_0,$$

$$\frac{d\alpha(0)}{dt} = \omega_0.$$

Задание 1.1 (Фазовый портрет)

На основании анализа математической модели и уравнения фазовых траекторий

$$\omega^2 = 2 \frac{g}{l} \cos(\alpha) + \text{const} \text{ сформулируйте выводы:}$$

1. при каких значениях α_0 и ω_0 маятник находится в верхнем и нижнем положениях равновесия;
2. при каких ограничениях на начальные данные α_0 и ω_0 маятник совершает колебательные движения или покачивания (замкнутые фазовые траектории);
3. при каких ограничениях на начальные данные α_0 и ω_0 маятник совершает вращательные движения (волнистые фазовые траектории);
4. при каких ограничениях на начальные данные α_0 и ω_0 фазовая траектория является сепаратрисой, т.е. разделяет колебательное и вращательное движение маятника.

Изобразите фазовый портрет динамической системы, соответствующей математической модели маятника, на фазовой плоскости переменных α , $\omega := \frac{d\alpha(t)}{dt}$. **Выделите цветом** в фазовой плоскости четыре траектории, соответствующие разным типам движения маятника (нижнее положение равновесия, колебательное движение, вращательное движение, сепаратриса).

Обратите внимание, что фазовый портрет периодичен по α с периодом 2π , так что достаточно ограничиться фазовым портретом для $-\pi \leq \alpha \leq \pi$. Фазовым многообразием здесь служит не плоскость, а цилиндрическая поверхность.

Задание 1.2 (Динамическая визуализация)

Осуществите динамическую визуализацию поведения маятника для интерактивного задания параметров модели $l > 0$, α_0 и ω_0 с учетом трех режимов его движения: стационарный режим, колебательные движения, вращательные движения.

В интерактивном объекте **укажите** тип движения маятника на основании выводов из Задания 1.1.

Задание 1.3 (Период колебаний)

Постройте зависимость периода колебаний маятника T от начального угла α_0 вида

$$T = T(\alpha_0) = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{1}{\sqrt{\cos(\alpha) - \cos(\alpha_0)}} d\alpha \text{ в предположении, что начальная скорость равна нулю } \omega_0 = 0.$$

Найти значение периода можно из закона сохранения энергии, см. [1, стр. 44-45]. Альтернативный способ построения зависимости $T(\alpha_0)$:

- умножить дифференциальное уравнения из математической модели (1) на $\alpha'(t)$;
- проинтегрировать полученное уравнения по времени от момента времени $t = 0$, что соответствует положению $\alpha = \alpha_0$ и начальной скорости $\omega_0 = 0$, до момента времени $t = T/4$, что соответствует $\alpha = 0$.

Зависимость периода колебаний T от начального угла α_0 является основной причиной того, что маятниковые часы не точные, так как тело в крайнем положении отклоняется на угол, отличный от α_0 , см. [1, стр. 44-45].

Аналитическая зависимость периода колебаний маятника от начального угла может быть найдена также в базе знаний Wolfram Alpha

```
In[*]:= First@FormulaData[{"Pendulum", "Standard"}]
Out[*]=
```

$$T = 4 \operatorname{EllipticK}\left[\sin\left[\frac{\Theta_0}{2}\right]^2\right] \sqrt{\frac{1}{g}}$$

В предположении о малых колебаниях маятника и без учета сопротивления среды период колебаний маятника T не будет зависеть от начальных данных. На основании математической модели (2) **постройте зависимость** периода колебаний T от параметров модели l и g . **Определите** длину стержня l для создания секундного маятника с периодом колебания $T = 2$ с.

Задание 2. Модель двухвидового взаимодействия “хищник-жертва”

Система уравнений Лотки-Вольтерра задает математическую модель взаимодействия популяции жертв с численностью $N = N(t) \geq 0$ и популяции хищников с численностью $M = M(t) \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \alpha N - cNM, \\ \frac{dM}{dt} &= -\beta M + dNM, \\ N(t_0) &= N_0, \\ M(t_0) &= M_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$\alpha = \text{const} > 0$ -- коэффициент прироста жертв при отсутствии хищников в условиях неограниченности ресурса для питания;

$c = \text{const} > 0$ -- коэффициент пропорциональности при взаимодействии жертв с хищниками, соответствующий уменьшению жертв;

$\beta = \text{const} > 0$ -- коэффициент смертности хищников при отсутствии жертв;

$d = \text{const} > 0$ -- коэффициент пропорциональности при взаимодействии жертв с хищниками, соответствующий увеличению жертв.

Задание 2.1 (Колебательное поведение)

Проиллюстрируйте существование колебательного поведения системы “хищник-жертва” в окрестности нетривиального положения равновесия $N^* = \frac{\beta}{d}$, $M^* = \frac{\alpha}{c}$ по решению математической модели (3) и по фазовому портрету динамической системы.

Решение необходимо построить численно, например, с помощью функции **NDSolve**.

Продемонстрируйте на фазовом портрете, что положение равновесия $N^* = \frac{\beta}{d}$, $M^* = \frac{\alpha}{c}$ является центром: окрестность положения равновесия (N^*, M^*) заполнена непересекающимися замкнутыми фазовыми траекториями, окружающими (N^*, M^*) .

Задание 2.2 (Неявная зависимость между $N(t)$ и $M(t)$)

Постройте дифференциальное уравнение фазовых траекторий для математической модели (3) и,

решая его, найдите неявную зависимость между численностями хищников и жертв в виде

$$M(t)^\alpha N(t)^\beta e^{-cM(t)-dN(t)} = C,$$

где значение неизвестной константы C определяется из начальных условий.

Задание 2.3 (Структурная неустойчивость модели “хищник-жертва”)

Проиллюстрируйте структурную неустойчивость математической модели “хищник-жертва” (3). Для этого **измените** математическую модель (3) добавлением к правым частям произвольных слагаемых вида $\epsilon f(N, M)$, где $\epsilon \ll 1$. **Продемонстрируйте** по фазовому портрету и по поведению решения для измененной математической модели, что изменяется качественное поведение системы уравнений Лотки-Вольтерра в окрестности нетривиального положения равновесия (N^*, M^*) , т.е. что центр изменяется на другой тип особой точки.

Для описания реальных процессов структурно-неустойчивые модели использовать нельзя!

Литература

- [1] В. В. Амелькин. Дифференциальные уравнения в приложениях. -- М.: Наука, 1987.
- [2] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. -- М.: Физматлит, 1959.