

Математическое моделирование динамических процессов I

Дисциплина для студентов специальности
«Компьютерная математика и системный анализ»

доц. Лаврова О.А.

механико-математический факультет, БГУ, Минск

2025

Тема 6. Методы моделирования, приводящие к дифференциальным уравнения с частными производными

Содержание Темы 6

1. Процесс переноса частиц вещества. **Уравнение непрерывности** для плотности частиц $\rho(x, t)$
2. **Уравнение переноса**
3. *Метод характеристик* для скорости движения частиц $u = u(t)$
4. *Метод характеристик* для $u = u(x)$
5. Моделирование дорожного трафика. **Уравнение Бюргерса**
6. *Метод характеристик* для $u = u(\rho)$
7. Задача о светофоре

Процесс переноса частиц вещества

Рассмотрим процесс переноса большого количества частиц вещества (пылинки, электроны) в трубе с заданной скоростью.

Концептуальная постановка задачи

- В цилиндрической трубе с площадью поперечного сечения S движется *большое количество частиц вещества*. Ось Ox направляем вдоль оси цилиндра
- Полагаем, что *частицы вещества не взаимодействуют друг с другом*, т.е. **плотность частиц** ρ достаточно мала
- Полагаем, что *скорость движения частиц задана функцией $u(t)$* и направлена вдоль оси трубы, следовательно процесс переноса является одномерным $\rho = \rho(x, t)$. Такое допущение справедливо для *узкой трубы*
- Необходимо найти распределение плотности частиц $\rho(x, t)$ в узкой трубе, если задана скорость движения частиц $u(t)$ и начальная плотность $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$

Закон сохранения массы вещества

Для построения математической модели процесса переноса частиц вещества воспользуемся **законом сохранения массы вещества**:

масса вещества любого объема неизменна во времени

Рассмотрим *малый элемент объема трубы* от x до $x + dx$ и рассчитаем изменение массы частиц вещества в *малый период времени* с t до $t + dt$

Закон сохранения массы вещества можно сформулировать так:

<масса на входе за dt > - <масса на выходе за dt > = <масса в объеме Sdx >

$$m_{in} - m_{out} = m_V .$$

В дальнейшем используем соотношения:

$$m_{in} = \rho dV = \rho S u dt, \quad m_V = \rho dV = \rho S dx.$$

$$m_{in} - m_{out} = m_v$$

$$m_{in} = \rho(x, t + \xi dt) \cdot S \cdot \underbrace{u(t) dt}_{\substack{\uparrow \\ \text{среднее значение скорости за интервал } t \in [t, t+dt] \\ 0 \leq \xi \leq 1}}$$

среднее значение скорости за интервал $t \in [t, t+dt]$
 $0 \leq \xi \leq 1$
 расстояние, пройденное элементом за dt

$$m_{out} = \rho(x+dx, t + \bar{\xi} dt) \cdot S \cdot u(t) dt$$

среднее значение скорости за интервал $t \in [t, t+dt]$, $0 \leq \bar{\xi} \leq 1$

$$m_v = \left(\rho(x+\eta dx, t+dt) - \rho(x+\bar{\eta} dx, t) \right) \cdot S \cdot dx$$

среднее значение в объеме в момент времени $t+dt$
 $0 \leq \eta, \bar{\eta} \leq 1$

Подставим в закон сохранения массы

$$\frac{\rho(x, t + \xi dt) - \rho(x+dx, t + \bar{\xi} dt)}{dx} u(t) = \frac{\rho(x+\eta dx, t+dt) - \rho(x+\bar{\eta} dx, t)}{dt}$$

Упрощаем $dt \rightarrow 0, dx \rightarrow 0$ $-\frac{\partial \rho}{\partial x} u(t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ или $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u(t) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$

Уравнение непрерывности I

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u(t) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

называется **уравнением непрерывности** или уравнением неразрывности в задачах гидродинамики, continuity equation, transport equation.

Это линейное однородное уравнение в частных производных 1-го порядка.

Если $x \in \mathbb{R}$, то к уравнению (1) формулируется *начальное условие*

$$\rho(x, t_0) = \rho_0(x)$$

Если $x \in [x_0, \infty)$, то к уравнению (1) формулируется начальное условие и *граничное условие*

$$\rho(x_0, t) = \rho_1(t)$$

Уравнение непрерывности II

В общем случае, когда $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ уравнение непрерывности принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\rho(\mathbf{x}, t)) + \sigma\rho = f(\mathbf{x}, t)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(\rho) + \sigma\rho = f(\mathbf{x}, t)$$

где

$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\rho(\mathbf{x}, t)$ – плотность потока вещества

$\sigma\rho$ – учитывает распад вещества, оседание или реакцию с внешней средой

$f(\mathbf{x}, t)$ – плотность внешних источников массы

Содержание Темы 6

1. Процесс переноса частиц вещества. **Уравнение непрерывности**
2. **Уравнение переноса**
3. *Метод характеристик для случая $u = u(t)$*
4. *Метод характеристик для случая $u = u(x)$*
5. Моделирование дорожного трафика. Уравнение Бюргерса
6. *Метод характеристик для случая $u = u(\rho)$*
7. Задача о светофоре

Уравнение переноса

Рассмотрим простейший случай математической модели для уравнения непрерывности, когда $x \in \mathbb{R}$ и $u = u_0 = \text{const}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2)$$

Уравнение в модели (2) называется **уравнением переноса** (linear advection equation)

Уравнение переноса является простейшим уравнением для описания волновых процессов

Уравнение переноса является уравнением гиперболического типа

Характеристическая кривая уравнения переноса

Представим уравнение переноса $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ в виде $\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \cdot (u_0, 1) = 0$ или $\text{grad}(\rho) \cdot \mathbf{v} = 0$, где $\mathbf{v} = (u_0, 1)$.

Тогда $\frac{\partial \rho}{\partial s} = 0$, где $\mathbf{s} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, т.е. $\rho = \text{const}$ вдоль линии, заданной направлением $\mathbf{v}$. Так как направление задается постоянным вектором, то *линия уровня* функции ρ является прямой линией. При этом $-1x + u_0t + x_0 = 0$ описывает прямую линию по направляющему вектору $\mathbf{v} = (u_0, 1)$ при условии, что $x(0) = x_0$.

Прямая $x = u_0t + x_0$ называется **характеристикой** уравнения переноса или **характеристической кривой** уравнения переноса.

Характеристическая кривая является линией уровня для плотности $\rho(x, t)$.

Аналитическое решение уравнения переноса

Рассмотрим произвольную точку $(\tilde{x}, \tilde{t})$, тогда существует x_0 , что $\tilde{x} = u_0 \tilde{t} + x_0$. Имеем, что точка $(x_0, 0)$ принадлежит характеристической прямой, проходящей через точку $(\tilde{x}, \tilde{t})$, следовательно

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{t}) = \rho(x_0, 0) = \rho_0(x_0) = \rho_0(\tilde{x} - u_0 \tilde{t})$$

общее решение уравнения переноса (2) для заданной функции ρ_0 .

Решение вида $\rho(x, t) = \rho_0(x - u_0 t)$ представляет собой **бегущую волну** (traveling wave) и называется *решением типа бегущей волны*.

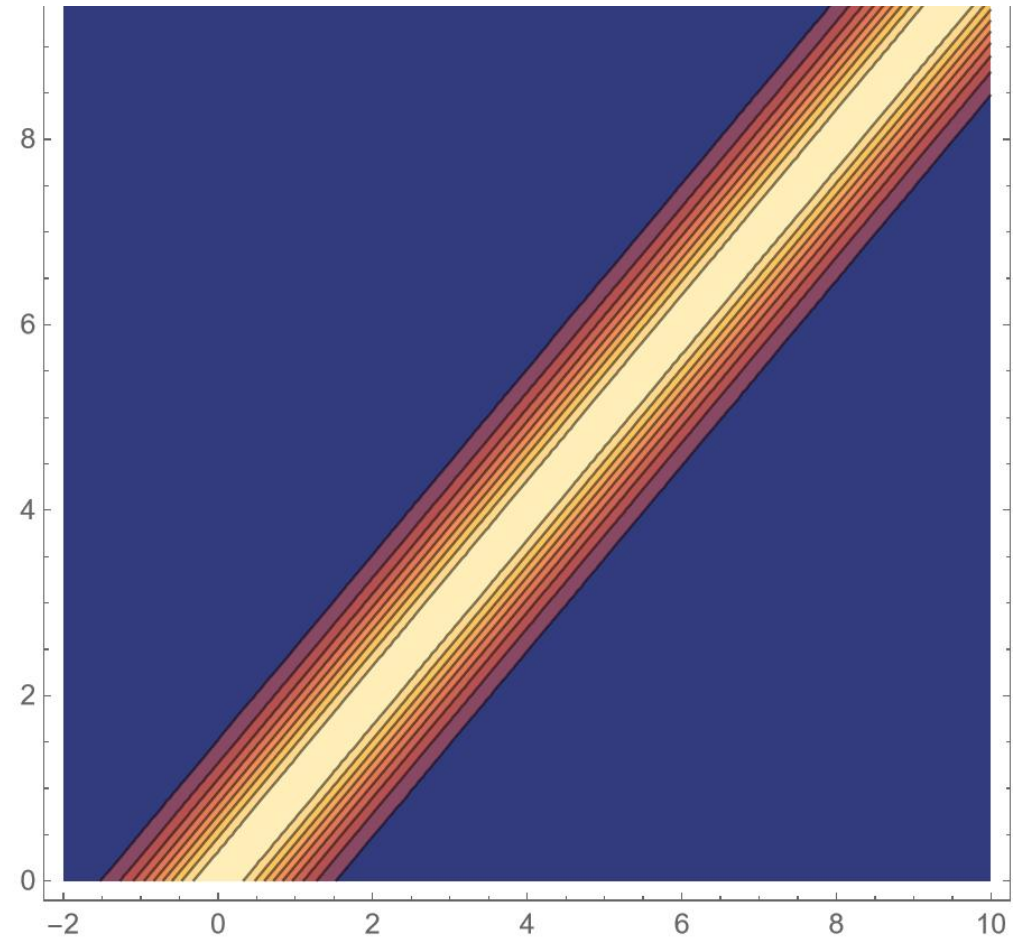
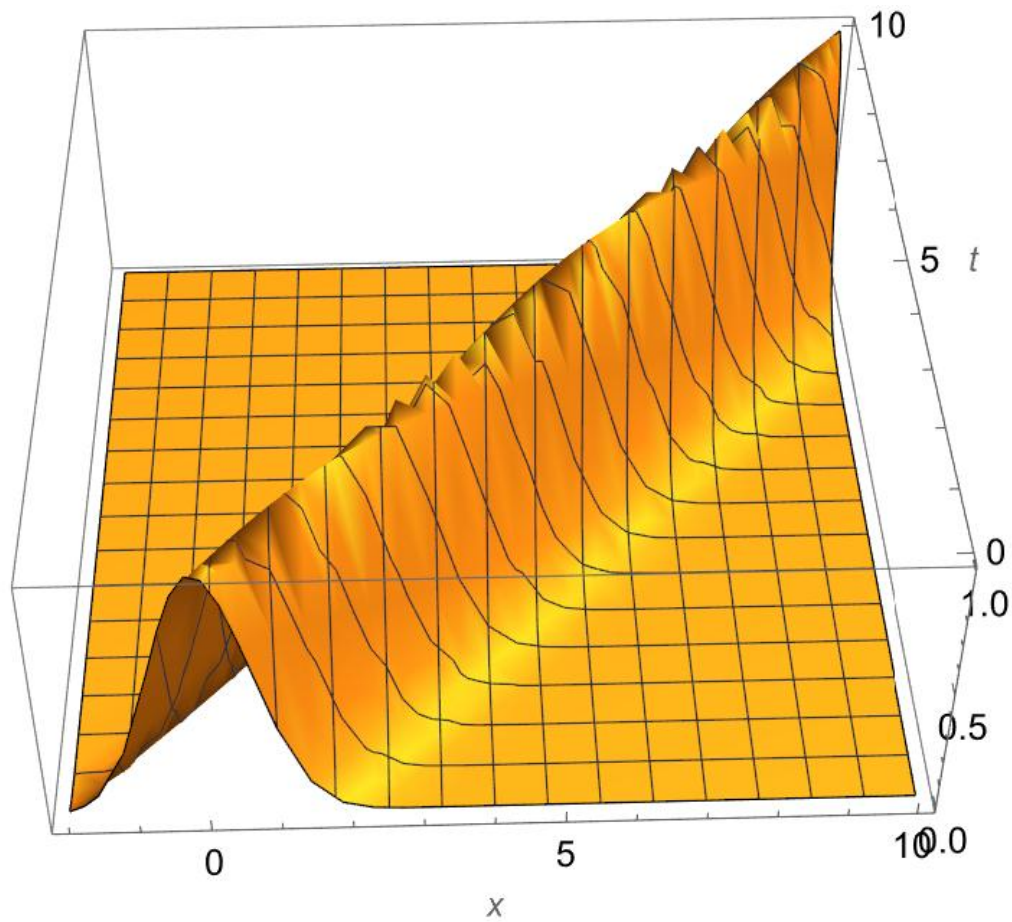
Решение с постоянным пространственным профилем $\rho_0(x)$ движется без искажений со скоростью u_0 вправо, если $u_0 > 0$, или влево, если $u_0 < 0$. Бегущая волна проходит вдоль трубы, не меняя своей формы, с постоянной скоростью u_0 .

Решение в виде бегущей волны появляется во многих приложениях биологии и химии.

```
In[3]:= u0 = 1; r0[x_] := e-x2;
```

```
In[4]:= r = r /. DSolve[{D[r[x, t], t] + u0 D[r[x, t], x] == 0, r[x, 0] == r0[x]}, r, {x, t}] // Flatten //
First
```

```
Out[4]= Function[{x, t}, e-(-t+x)2]
```



Содержание Темы 6

1. Процесс переноса частиц вещества. **Уравнение непрерывности**
2. Уравнение переноса
3. **Метод характеристик для случая $u = u(t)$**
4. Метод характеристик для случая $u = u(x)$
5. Моделирование дорожного трафика. Уравнение Бюргерса
6. Метод характеристик для случая $u = u(\rho)$
7. Задача о светофоре

Метод характеристик для случая $u = u(t)$ I

Для построения аналитического решения для математической модели

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u(t) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, & t \geq t_0, x \in \mathbb{R} \\ \rho(x, t_0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3)$$

используется **метод характеристик**, который основан на сведении ДУЧП к системе ОДУ вдоль характеристик.

Полагаем, что $x = x(\xi)$, $t = t(\xi)$. Тогда $\rho = \rho(x(\xi), t(\xi))$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dt}{d\xi}.$$

На основании уравнения $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u(t) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ полагаем, что $\frac{d\rho}{d\xi} = 0$. Тогда $\frac{dt}{d\xi} = 1$, $\frac{dx}{d\xi} = u(t)$.

Метод характеристик для случая $u = u(t)$ II

Сформулируем задачу Коши для системы ОДУ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{d\xi} = 0 \\ \frac{dt}{d\xi} = 1 \\ \frac{dx}{d\xi} = u(t) \\ t(0) = t_0 \\ x(0) = x_0 \\ \rho(0) = \rho_0(x_0) \end{array} \right.$$

Так как $d\xi = dt$, система ОДУ переформулируется для двух уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} = 0, \rho(t_0) = \rho_0(x_0) \\ \frac{dx}{dt} = u(t), x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Метод характеристик для случая $u = u(t)$ III

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = 0, \rho(t_0) = \rho_0(x_0) \\ \frac{dx}{d\xi} = u(t), x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1. $\frac{d\rho}{dt} = 0, \rho(t_0) = \rho_0(x_0)$, следовательно $\rho(t) = \rho_0(x_0)$
2. $\frac{dx}{dt} = u(t), x(t_0) = x_0$, следовательно $x = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau + x_0$. Тогда

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left(x - \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right)$$

Метод характеристик для случая $u = u(t)$ IV

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u(t) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, & t \geq t_0, x \in \mathbb{R} \\ \rho(x, t_0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left(x - \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right) \text{ -- решение модели (3)}$$

$x - \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau = x_0$ -- характеристическая кривая уравнения непрерывности для скорости потока частиц $u = u(t)$.

Частный случай. Для уравнения переноса имеем, что $u(t) = u_0$ и $t_0 = 0$, то

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left(x - \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right) = \rho_0(x - u_0 t)$$

Содержание Темы 6

1. Процесс переноса частиц вещества. **Уравнение непрерывности**
2. Уравнение переноса
3. *Метод характеристик для случая $u = u(t)$*
4. **Метод характеристик для случая $u = u(x)$**
5. Моделирование дорожного трафика. Уравнение Бюргерса
6. *Метод характеристик для случая $u = u(\rho)$*
7. Задача о светофоре

Скорость переноса частиц зависит только от x

Для некоторых математических моделей процессов переноса скорость частиц определяется только пространственной координатой $u = u(x)$.

Рассмотрим частный вид такой математической модели

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (a x + b) \frac{\partial \rho}{\partial x} = c \rho, & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4)$$

где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $c = \text{const}$ заданные параметры модели.

В частности, к такому виду сводится математическая модель для описания процессов переноса химической субстанции в реке со скоростью, линейно зависимой от x .

Метод характеристик для случая $u = u(x)$ I

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (a x + b) \frac{\partial \rho}{\partial x} = c \rho, & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4)$$

Применим **метод характеристик** для построения аналитического решения модели (4)

Полагаем, что $x = x(\xi)$, $t = t(\xi)$. Тогда $\rho = \rho(x(\xi), t(\xi))$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dt}{d\xi}.$$

На основании уравнения $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (a x + b) \frac{\partial \rho}{\partial x} = c \rho$ полагаем, что $\frac{d\rho}{d\xi} = c \rho$. Тогда $\frac{dt}{d\xi} = 1$, $\frac{dx}{d\xi} = a x + b$.

Метод характеристик для случая $u = u(x)$ II

Сформулируем задачу Коши для системы ОДУ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{d\xi} = c\rho \\ \frac{dt}{d\xi} = 1 \\ \frac{dx}{d\xi} = ax + b \\ t(0) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \rho(0) = \rho_0(x_0) \end{array} \right.$$

Так как $d\xi = dt$, система ОДУ переформулируется для двух уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} = c\rho, \rho(0) = \rho_0(x_0) \\ \frac{dx}{dt} = ax + b, x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

Метод характеристик для случая $u = u(x)$ III

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = c\rho, \rho(0) = \rho_0(x_0) \\ \frac{dx}{d\xi} = ax + b, x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. $\frac{d\rho}{\rho} = cdt$, следовательно $\ln(\rho) - \ln(\rho_0(x_0)) = ct$, тогда $\rho = \rho_0(x_0)e^{ct}$

2. $\frac{dx}{ax+b} = dt$. Тогда $\frac{1}{a}(\ln(ax+b) - \ln(ax_0+b)) = t$ при условии $ax+b > 0$.

Выразим x_0 : $ax+b = (ax_0+b)e^{at}$, следовательно $x_0 = \frac{1}{a}((ax+b)e^{-at} - b)$

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left(\frac{1}{a}((ax+b)e^{-at} - b) \right) e^{ct} \text{ при условии } ax+b > 0$$

Содержание Темы 6

1. Процесс переноса частиц вещества. **Уравнение непрерывности**
2. Уравнение переноса
3. *Метод характеристик для случая $u = u(t)$*
4. *Метод характеристик для случая $u = u(x)$*
5. **Моделирование дорожного трафика. Уравнение Бюргерса**
6. *Метод характеристик для случая $u = u(\rho)$*
7. Задача о светофоре

Моделирование дорожного трафика

Моделирование интенсивного дорожного трафика на макроуровне, т.е. без рассмотрения отдельных транспортных средств, при движении без обгонов возможно с помощью уравнения непрерывности. Первые модели дорожного трафика построены в 1955-56 гг.

Концептуальная постановка задачи

- Полагаем, что *дорога описывается прямой линией*
- Автомобили моделируются **плотностью автомобилей** $\rho(x, t)$ в единицах машин/км с заданной средней скоростью потока
- Полагаем, что *скорость потока зависит только от ρ* .
В частности, $u(\rho)$ – монотонно убывающая функция такая, что $u(0) = u_{max}$ – максимальная скорость движения при отсутствии машин и $\exists \rho_{max}$, что $u(\rho_{max}) = 0$. В простейшем случае линейного приближения

$$u(\rho) = u_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right), \text{ где } 0 \leq \rho \leq \rho_{max}.$$

Математическая модель

Математическая модель строится на основании уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(u(\rho) \rho(x, t)) + \sigma \rho = f(x, t)$$

Для $u(\rho) = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$ при $\sigma = 0$ и $f(x, t) = 0$ имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \rho(x, t) \right)_x = 0 \quad (5)$$

Данное уравнение является примером *квазилинейного* ДУЧП 1-го порядка: $f(x, t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} + g(x, t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + h(x, t, \rho) = 0$

Уравнение Бюргерса I

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(u_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right) \rho(x, t) \right)_x = 0 \quad (5)$$

Введем безразмерные переменные $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{t} = t/\tau$, $\tilde{\rho} = 1 - 2 \frac{\rho}{\rho_{max}}$, где L и τ – характерные длина и время такие, что $\frac{L}{\tau} = u_{max}$.

Имеем, что $\rho = \frac{(1-\tilde{\rho})\rho_{max}}{2}$. Подставляем в уравнение (5)

$$-\frac{\rho_{max}}{2} \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{L} \left(u_{max} \left(1 - \frac{(1-\tilde{\rho})}{2} \right) \frac{(1-\tilde{\rho})\rho_{max}}{2} \right)_{\tilde{x}} = 0$$

$$-\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{2} (1 - \tilde{\rho}^2)_{\tilde{x}} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

невязкое уравнение Бюргерса (Burgers equation)

Уравнение Бюргерса II

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0$$

Так как размерная и безразмерная плотность связаны соотношением

$\tilde{\rho} = 1 - 2 \frac{\rho}{\rho_{max}}$, то из ограничений $0 \leq \rho \leq \rho_{max}$ следует, что $-1 \leq \tilde{\rho} \leq 1$ для модели дорожного трафика в безразмерных переменных.

В дальнейшем опускаем символ «тильда» в обозначениях

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \text{где } -1 \leq \rho \leq 1.$$

Содержание Темы 6

1. Процесс переноса частиц вещества. **Уравнение непрерывности**
2. Уравнение переноса
3. *Метод характеристик для случая $u = u(t)$*
4. *Метод характеристик для случая $u = u(x)$*
5. Моделирование дорожного трафика. Уравнение Бюргерса
6. ***Метод характеристик для случая $u = u(\rho)$***
7. Задача о светофоре

Метод характеристик для случая $u = u(\rho)$ I

Рассмотрим модель с начальным условием

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6)$$

Для построения решения применим **метод характеристик**.

Полагаем, что $x = x(\xi)$, $t = t(\xi)$. Тогда $\rho = \rho(x(\xi), t(\xi))$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dt}{d\xi}.$$

На основании уравнения $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ полагаем,

что $\frac{d\rho}{d\xi} = 0$. Тогда $\frac{dt}{d\xi} = 1$, $\frac{dx}{d\xi} = \rho$.

Метод характеристик для случая $u = u(\rho)$ II

Сформулируем задачу Коши для системы ОДУ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{d\xi} = 0 \\ \frac{dt}{d\xi} = 1 \\ \frac{dx}{d\xi} = \rho \\ t(0) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \rho(0) = \rho_0(x_0) \end{array} \right.$$

Так как $d\xi = dt$, система ОДУ переформулируется для двух уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} = 0, \rho(0) = \rho_0(x_0) \\ \frac{dx}{dt} = \rho, x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

Метод характеристик для случая $u = u(\rho)$ III

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = 0, \rho(0) = \rho_0(x_0) \\ \frac{dx}{dt} = \rho, x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. $\frac{d\rho}{dt} = 0, \rho(0) = \rho_0(x_0)$, следовательно $\rho(t) = \rho_0(x_0)$
2. $\frac{dx}{dt} = \rho, x(0) = x_0$, следовательно $x - x_0 = \rho_0(x_0)t$

Аналитическое решение для модели (6)

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - \rho(x, t)t)$$

имеет вид *неявного соотношения*.

Характеристические кривые $x - x_0 = \rho_0(x_0)t$ являются прямыми линиями, как и для уравнения переноса. Важным отличием является то, что характеристические прямые не являются параллельными друг другу и могут пересекаться. При пересечении характеристик возникает *ударная волна (shock wave)*, когда функция плотности ρ испытывает скачок, т.е. является разрывной функцией.

Содержание Темы 6

1. Процесс переноса частиц вещества. **Уравнение непрерывности**
2. Уравнение переноса
3. *Метод характеристик для случая $u = u(t)$*
4. *Метод характеристик для случая $u = u(x)$*
5. Моделирование дорожного трафика. Уравнение Бюргерса
6. *Метод характеристик для случая $u = u(\rho)$*
7. **Задачи о светофоре**

Задача 1 о светофоре I

Задача 1. Предположим, что в точке $x = 0$ установлен светофор, перед которым плотно стоят машины, а после которого дорога пустая. В момент времени $t = 0$ красный свет светофора меняется на зеленый.

Согласно условию задачи имеем, что

$$\rho_0(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \quad (\text{пробка}) \\ 1, & x > 0 \quad (\text{дорога пустая}) \end{cases}$$

Математическая модель задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

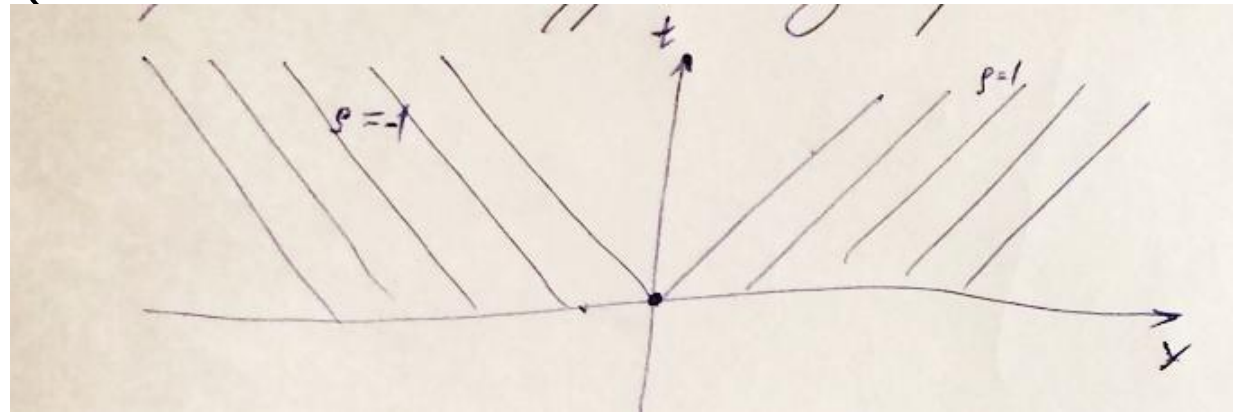
Из общего решения $\rho(x, t) = \rho_0(x - \rho(x, t)t)$ имеем, что

$$\rho(x, t) = \begin{cases} -1, & x - (-1)t \leq 0 \text{ или } x \leq -t \\ 1, & x - 1t > 0 \text{ или } x > t \end{cases}$$

Задача 1 о светофоре II

$$\rho(x, t) = \begin{cases} -1, & x \leq -t \\ 1, & x > t \end{cases}$$

Построим линии уровня для решения



Имеем, что решение $\rho(x, t)$ не определено при $-t < x < t$. Это является следствием разрывности функции $\rho_0(x)$. Функция решения $\rho(x, t)$ аппроксимируется в области $-t < x < t$ непрерывной функцией

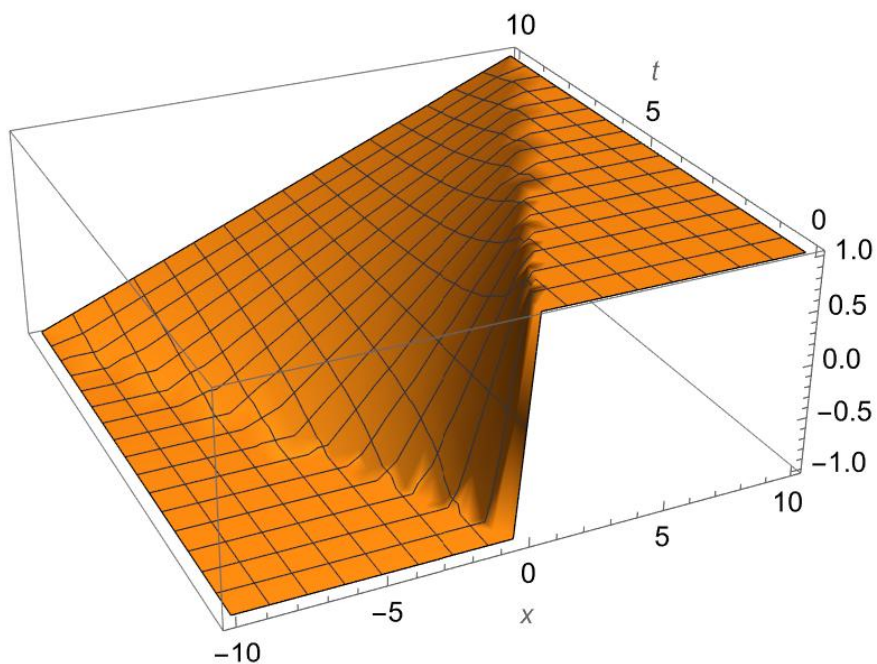
$$\rho(x, t) = \begin{cases} -1, & x \leq -t \\ \frac{x}{t}, & -t < x < t \\ 1, & x > t \end{cases}$$

Задача 1 о светофоре III

```
In[13]:= r2[x_, t_?NonNegative] := Which[x ≤ -t, -1 (*пробка*), -t < x < t,  $\frac{x}{t}$ , x > t, 1
(*пустая дорога*)];
```

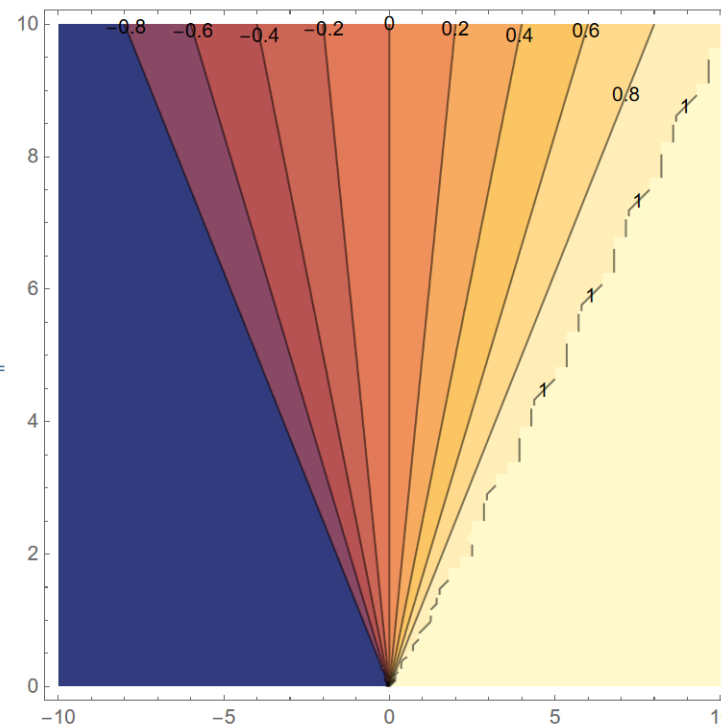
```
In[14]:= Plot3D[r2[x, t], {x, -10, 10}, {t, 0, 10}, AxesLabel → Automatic]
```

Out[14]=



```
In[15]:= ContourPlot[r2[x, t], {x, -10, 10}, {t, 0, 10}, ContourLabels → True]
```

Out[15]=



Задача 2 о светофоре I

Задача 2. Предположим, что в точке $x = 0$ установлен светофор, перед которым дорога пустая, а после которого плотно стоят машины. В момент времени $t = 0$ красный свет светофора меняется на зеленый.

Согласно условию задачи имеем, что

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \text{ (дорога пустая)} \\ -1, & x > 0 \text{ (пробка)} \end{cases}$$

Математическая модель задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

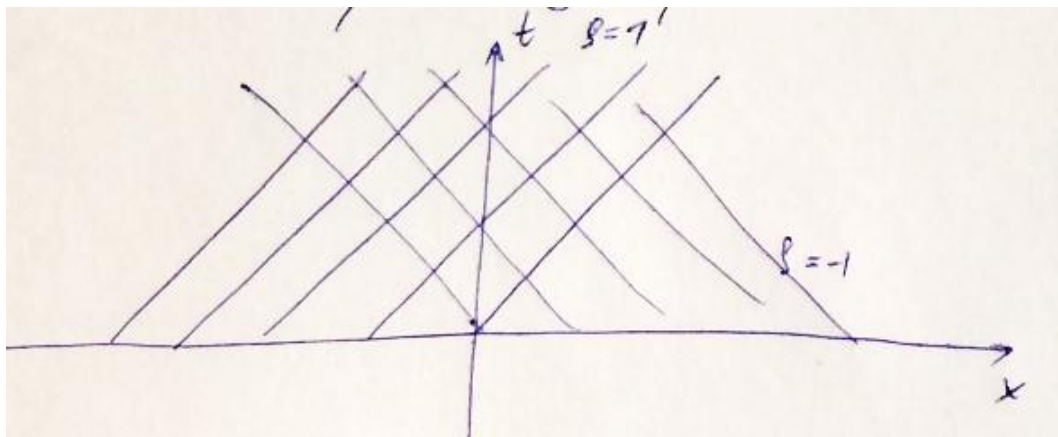
Из общего решения $\rho(x, t) = \rho_0(x - \rho(x, t)t)$ имеем, что

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 1, & x - 1t \leq 0 \text{ или } x \leq t \\ -1, & x - (-1)t > 0 \text{ или } x > -t \end{cases}$$

Задача 2 о светофоре II

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 1, & x \leq t \\ -1, & x > -t \end{cases}$$

Построим линии уровня для решения



Имеем, что решение $\rho(x, t)$ имеет два решения при $-t < x < t$.

Следовательно математическая модель на основе уравнения Бюргерса

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ является некорректной для описания дорожного трафика по условию Задачи 2.