

Математическое моделирование динамических процессов I

Дисциплина для студентов специальности
«Компьютерная математика и системный анализ»

доц. Лаврова О.А.

механико-математический факультет, БГУ, Минск

2025

Тема 4. Математические модели с запаздыванием

Обоснование

Одним из недостатков рассмотренных ранее математических моделей является то, что при их построении не учитывается *предыстория* в поведении объекта моделирования, не учитывается влияние *задержек во времени* на характер поведения объекта моделирования.

Например,

- в модели численности популяции рождаемость/смертность в момент времени t должна зависеть от численности популяции в предыдущий момент времени $(t - T)$;
- в модели распространения инфекций необходимо учитывать, что заболевание наступает в момент времени t после контакта здоровой и инфицированной особей в момент времени $t - T$ (инкубационный период).

Содержание Темы 4

1. Дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.
Примеры: линейное ДУ, уравнение Хатчинсона, модель концентрации клеток
2. Начальная задача для ДУ с запаздывающим аргументом. Метод последовательного интегрирования
3. Качественный анализ уравнения Хатчинсона

ДУ с запаздывающим аргументом

Одной из возможностей математического моделирования эффектов запаздывания является применение **дифференциального уравнения с запаздывающим (отклоняющимся) аргументом**

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - T)) \quad (1)$$

Уравнение (1) описывает *процесс с последействием*, скорость которого в любой момент времени t определяется его состоянием не только в текущий момент времени $x(t)$, но и состоянием в предшествующий момент времени $x(t - T)$.

Правая часть уравнения (1) содержит одно *дискретное запаздывание* вида $x(t - T)$ с **параметром запаздывания** $T = \text{const} > 0$.

ДУ с запаздывающим аргументом является более сложным математическим объектом, чем ОДУ. Построение теории ДУ с запаздывающим аргументом начато в 1949 году.

Линейное ДУ запаздывающего типа

$$x'(t) = -\frac{\pi}{2T} x(t - T)$$

Решением является **периодическая функция** $x(t) = C \cos\left(\frac{\pi}{2T} t\right)$, $C = \text{const}$.

Обратите внимание, что ДУ первого порядка с запаздывающим аргументом может описывать колебательное поведение.

Покажем, что динамическая система 1-го порядка $x'(t) = f(x)$ периодических решений не может иметь. Предположим, что $x(t + T) = x(t)$. Умножим уравнение на $x'(t) \neq 0$ и проинтегрируем на отрезке $[t, t + T]$

$$\int_t^{t+T} x'(t)^2 dt = \int_t^{t+T} x'(t) f(x) dt = \int_{x(t)}^{x(t+T)} f(x) dx = 0$$

Получаем противоречие, так как $x'(t) \neq 0$.

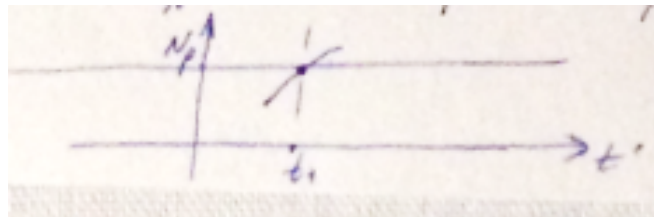
Уравнение Хатчинсона I

Уравнение Хатчинсона является обобщением *логистического уравнения*

$$N'(t) = k N(t) \left(1 - \frac{N(t-T)}{N_p} \right), \quad k > 0 \quad (2)$$

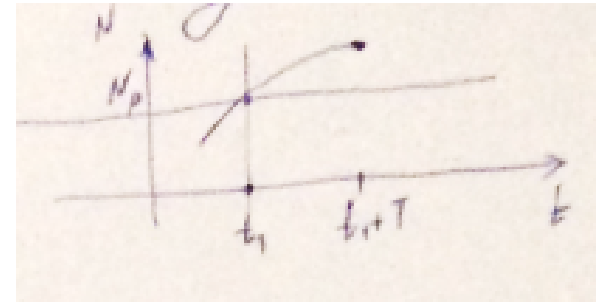
Проанализируем качественное поведение решения уравнения (2) в окрестности положения равновесия $N(t) \equiv N_p$.

- Предположим, что при $t = t_1$ $N(t_1) = N_p$ и что $N(t - T) < N_p$ при $t < t_1$ из малой окрестности точки t_1 . Тогда $1 - \frac{N(t-T)}{N_p} > 0$, следовательно $N'(t) > 0$, следовательно $N(t)$ возрастает в окрестности точки t_1 .

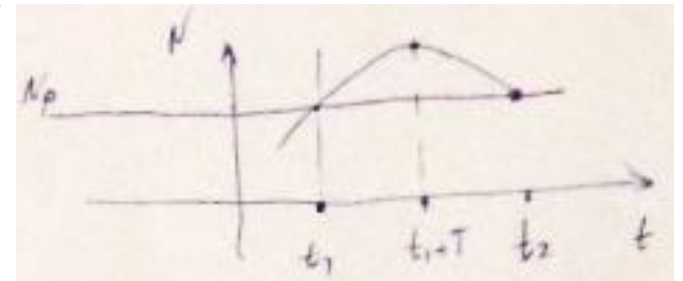


Уравнение Хатчинсона II

- Рассмотрим момент времени $t = t_1 + T$. Тогда $N(t - T) = N(t_1) = N_p$, следовательно $N'(t) = 0$.

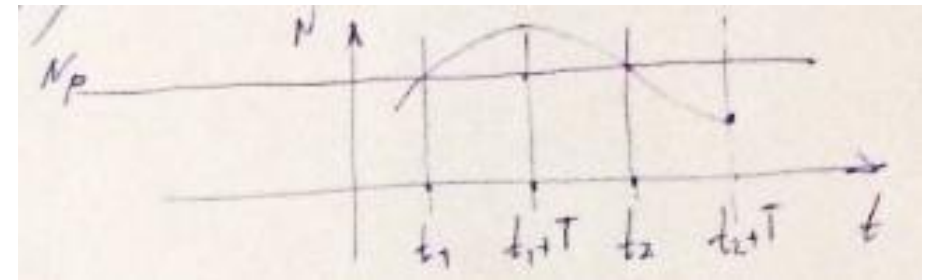


- Тогда существует момент времени $t = t_2$ такой, что при $t_1 + T < t < t_2$ имеем $N(t - T) > N_p$, следовательно $N'(t) < 0$ и $N(t)$ убывает.

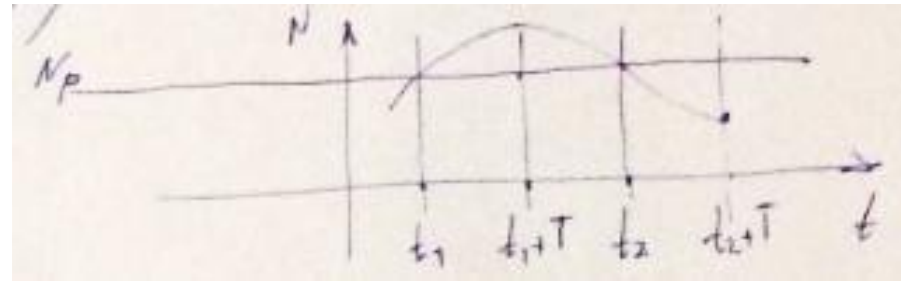


Полагаем, что $N(t_2) = N_p$.

- $N(t)$ убывает до момента времени $t = t_2 + T$, так как $N(t_2 + T - T) = N_p$, следовательно $N'(t) = 0$



Уравнение Хатчинсона III



Вывод: решение уравнения Хатчинсона демонстрирует колебательное поведение в окрестности положения равновесия $N(t) \equiv N_p$.

Модель для концентрации клеток I

Сформулируем математическую модель, описывающую процесс регуляции организмом концентрации клеток крови. В модели будет учитываться, что воспроизводство новых клеток наступает с задержкой во времени.

Концептуальная постановка задачи:

- Обозначим через $c(t) \geq 0$ функцию концентрации клеток крови;
- Скорость воспроизводства клеток осуществляется с запаздыванием по следующему закону $\lambda \frac{c(t-T)}{1+c(t-T)^m}$, где параметры являются заданными: $T = \text{const} > 0$ – задержка в воспроизводстве новых клеток и поступлении их в кровотоки, $\lambda = \text{const} > 0$, $m = \text{const} > 0$;
- Скорость гибели клеток пропорциональна концентрации с заданным коэффициентом смертности $g = \text{const} > 0$.

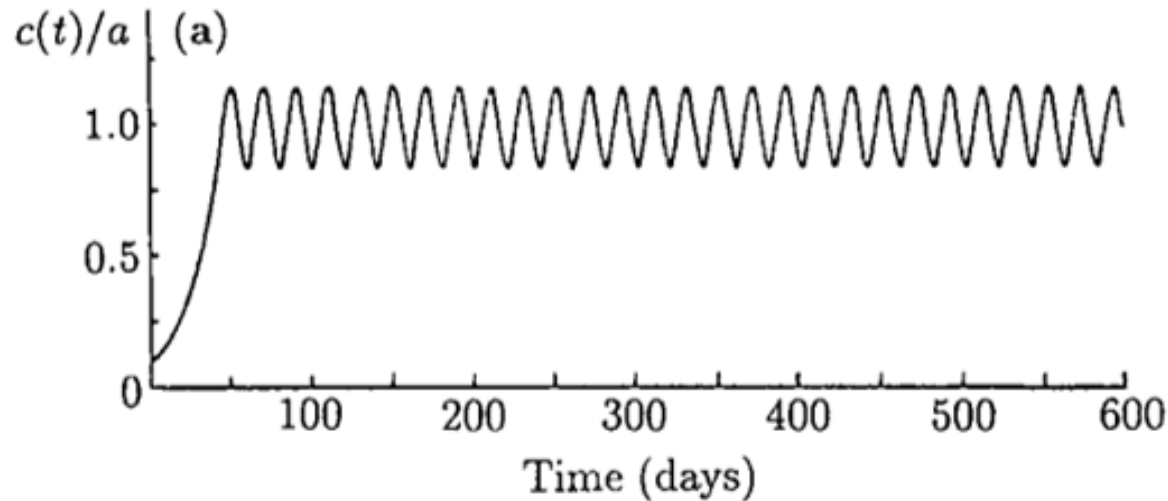
Математическая модель:

$$c'(t) = \lambda \frac{c(t-T)}{1+c(t-T)^m} - g c(t), \quad t > t_0$$

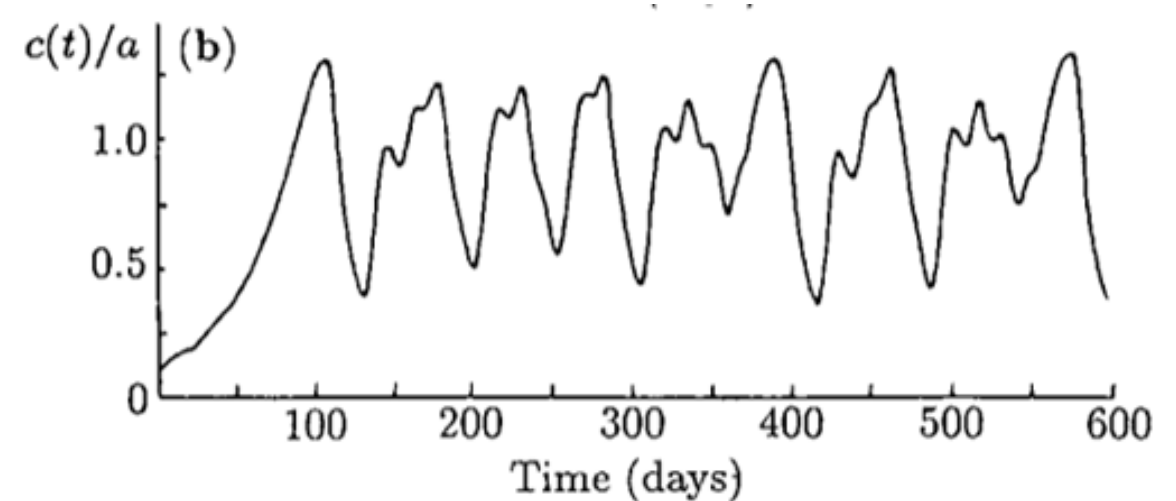
начальное условие

Модель для концентрации клеток II

$T = 6$



$T = 20$

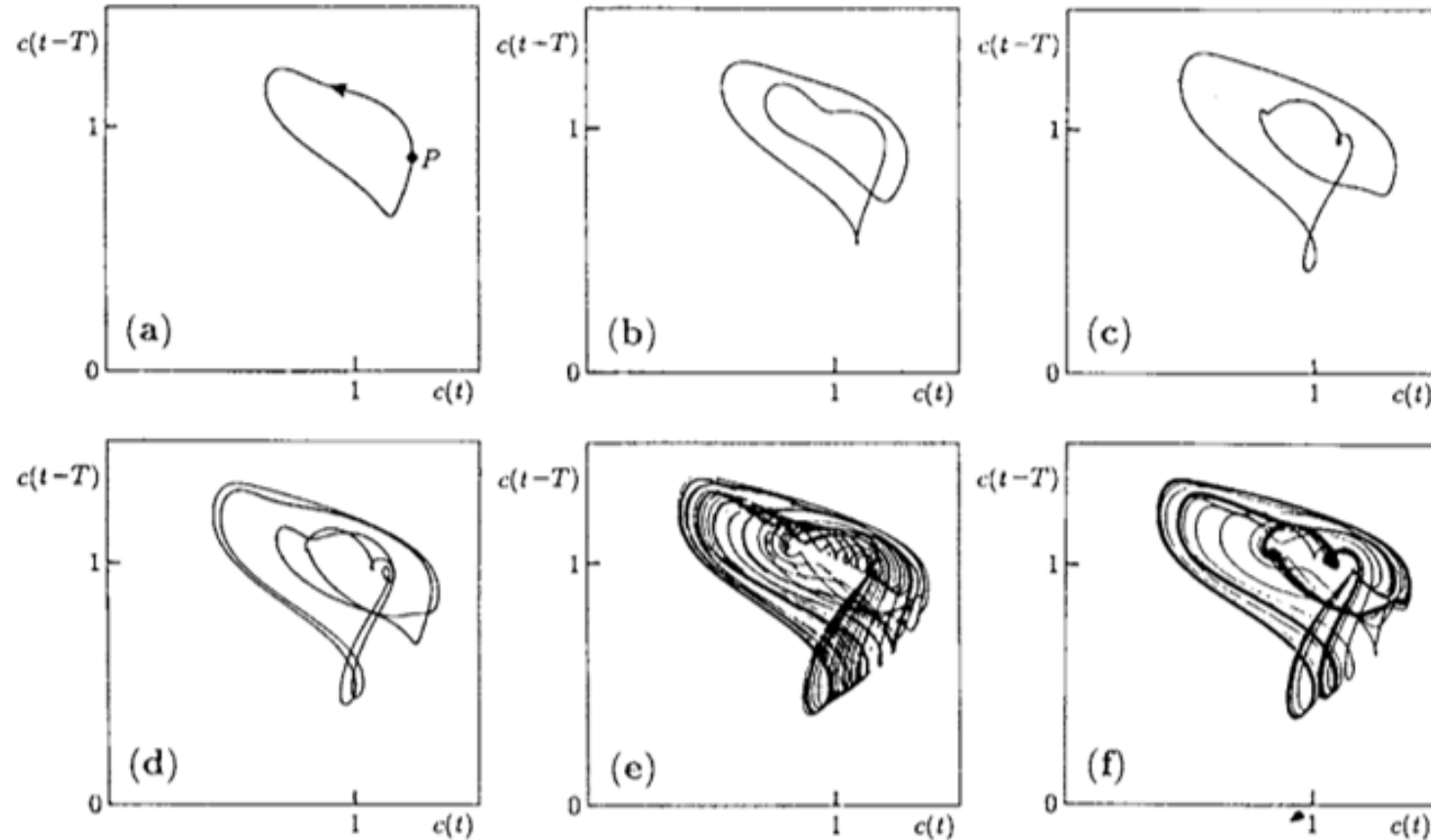


L. Glass, M. C. Mackey. Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems. Ann. N. Y. Acad. Sci., 316:214--235, 1979.

По графикам решений видно, что величина запаздывания T в воспроизводстве лейкоцитов влияет на динамику изменения концентрации: периодическое изменение концентрации при $T = 6$ или аperiodическое изменение концентрации при $T = 20$. Шестидневный период ($T = 6$) является нормой для изменения концентрации лейкоцитов в крови человека. Увеличение периода приводит к аperiodическому изменению концентрации и может являться причиной нарушений здоровья и заболеваний человека.

Модель для концентрации клеток III

Фазовые траектории в фазовой плоскости $(c(t), c(t - T))$ в окрестности положения равновесия $c(t) \equiv 1$ демонстрируют периодическое и аperiodическое изменение концентрации при различных значениях параметров модели



L. Glass, M. C. Mackey. Ann. N. Y. Acad. Sci., 1979.

Содержание Темы 4

1. Дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.
Примеры: линейное ДУ, уравнение Хатчинсона, модель концентрации клеток
2. Начальная задача для ДУ с запаздывающим аргументом. Метод последовательного интегрирования
3. Качественный анализ уравнения Хатчинсона

Начальная задача I

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - T)) \quad (1)$$

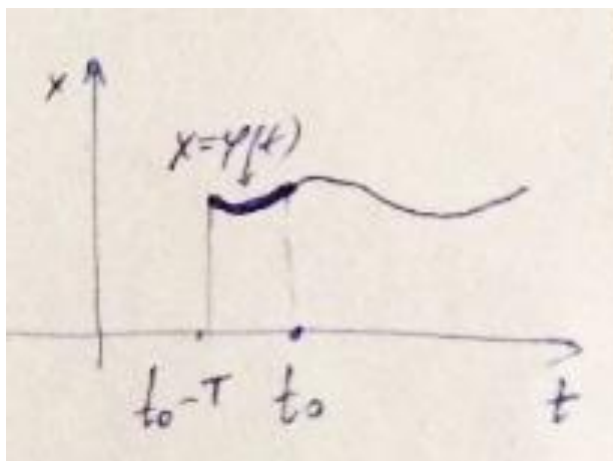
Полагаем, что решение $x(t)$ ДУ с запаздывающим аргументом (1) известно на **начальном множестве** $t_0 - T \leq t \leq t_0$ и решение $x(t)$ задано **начальной функцией** $\varphi(t)$ на начальном множестве. Тогда **начальная задача** для уравнения (1) примет вид

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - T)), & t > t_0 \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - T \leq t \leq t_0 \end{cases} \quad (3)$$

Начальная задача II

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - T)), & t > t_0 \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - T \leq t \leq t_0 \end{cases} \quad (3)$$

Начальное условие задачи (3) определяется начальной функцией $\varphi(t)$ на начальном множестве.



Отметим, что в правой части уравнения при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ вместо $x(t - T)$ необходимо использовать $\varphi(t - T)$.

Метод последовательного интегрирования I

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - T)), & t > t_0 \\ x(t) = \varphi(t), & t \in I_0 \end{cases} \quad (3)$$

Метод последовательного интегрирования (метод шагов) – это метод последовательного нахождения решения $x(t)$ начальной задачи (3) на интервалах $I_k := (t_0 + (k - 1)T, t_0 + kT]$ длины T , где $k = 1, 2, \dots, n$, по известному решению на I_{k-1} -ом интервале.

Введем обозначение $x(t)|_{I_k} := \varphi_k(t)$, где $k = 0, 1, \dots, n$.

Из формулировки задачи (2) имеем, что $\varphi_0(t) = \varphi(t)$ при $t \in I_0$.

Шаг 1: Решаем задачу Коши для ОДУ без запаздывания на интервале I_1

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = f(t, \varphi_1(t), \varphi_0(t - T)), & t \in I_1 \\ \varphi_1(t_0) = \varphi_0(t_0), \end{cases}$$

Метод последовательного интегрирования II

Шаг 2: Решаем задачу Коши для ОДУ без запаздывания на интервале I_2 , используя решение $\varphi_1(t)$ с предыдущего шага

$$\begin{cases} \varphi_2'(t) = f(t, \varphi_2(t), \varphi_1(t - T)), & t \in I_2 \\ \varphi_2(t_0 + T) = \varphi_1(t_0 + T), \end{cases}$$

и так далее до последнего шага:

Шаг n: Решаем задачу Коши для ОДУ без запаздывания на интервале $I_n = (t_0 + (n - 1)T, t_0 + nT]$, используя решение $\varphi_{n-1}(t)$

$$\begin{cases} \varphi_n'(t) = f(t, \varphi_n(t), \varphi_{n-1}(t - T)), & t \in I_n \\ \varphi_n(t_0 + (n - 1)T) = \varphi_{n-1}(t_0 + (n - 1)T) \end{cases}$$

Пример последовательного интегрирования

Пример $\begin{cases} x'(t) = 6 \cdot x(t-1) \\ x(t) = \frac{t}{\varphi(t)} \end{cases} \Rightarrow T=1$
 при $0 \leq t \leq 1 \leftarrow t_0=1$
 Найти $x(t)$?

Шаг 1 Решаем ДУ без запаздывания
 $t_0=1, T=1, t_0-T=0$
 $\varphi_0(t) = t = x(t) \Rightarrow x(t-1) = t-1$
 получим $\begin{cases} x'(t) = 6 \cdot (t-1) \\ x(1) = 1, \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$
 интегрируем, имеем $x(t) = \frac{6(t-1)^2}{2} + C$
 используем начальные условия
 $1 = \frac{6(1-1)^2}{2} + C \Rightarrow C=1$
 Обозначим
 $\varphi_1(t) = x(t) = 3(t-1)^2 + 1, \quad 1 \leq t \leq 2$

Шаг 2 Решаем ОДУ без запаздывания при $t \in I_2$ (задача Коши)
 $\begin{cases} x'(t) = 6 \cdot (3((t-1)-1)^2 + 1) \\ x(2) = \varphi_1(2) = 3(2-1)^2 + 1 = 4, \quad 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$
 Интегрируем, получим
 $x(t) = 6 \cdot ((t-2)^3 + t) + C$
 $4 = 6 \cdot (0+2) + C \Rightarrow C = -8$
 Тогда $x(t) = 6(t-2)^3 + 6t - 8, \quad 2 \leq t \leq 3$
 $\varphi_2(t) \leftarrow$ и т. д.

Содержание Темы 4

1. Дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.
Примеры: линейное ДУ, уравнение Хатчинсона, модель концентрации клеток
2. Начальная задача для ДУ с запаздывающим аргументом. Метод последовательного интегрирования
3. Качественный анализ уравнения Хатчинсона

Качественный анализ уравнения Хатчинсона I

Для проведения *линейного анализа устойчивости* для уравнения Хатчинсона $N'(t) = k N(t) \left(1 - \frac{N(t-T)}{N_p}\right)$ перейдем к безразмерным переменным $N^* = \frac{N}{N_p}$, $t^* = kt$, $T^* = kT$. Тогда уравнение преобразуется к виду $k N_p \frac{dN^*}{dt^*} = k N_p N^* \left(1 - \frac{N_p N^*(t^*-T^*)}{N_p}\right)$ или

$$\frac{dN^*}{dt^*} = N^*(t^*)(1 - N^*(t^* - T^*)) \quad (4)$$

Уравнение (4) имеет два положения равновесия $N^* \equiv 0$ и $N^* \equiv 1$, как и логистическое уравнение при аналогичном обезразмеривании.

*В дальнейшем опустим символ * в обозначениях безразмерных переменных.*

Качественный анализ уравнения Хатчинсона II

$$N'(t) = N(t)(1 - N(t - T)) \quad (4)$$

Рассмотрим линеаризацию уравнения (4) в окрестности $N(t) \equiv 0$. Имеем $N'(t) \approx N(t)$. Следовательно малое возмущение решения $N(t) \equiv 0$ приведет к его экспоненциальному росту.

Вывод на основании линейного анализа устойчивости: положение равновесия $N(t) \equiv 0$ уравнения Хатчинсона является неустойчивым.

Рассмотрим линеаризацию уравнения (4) в окрестности нетривиального положения равновесия $N(t) \equiv 1$. Сначала сделаем замену переменных $n(t) := N(t) - 1$, тогда

$$n'(t) = (n(t) + 1)(-n(t - T)).$$

Рассмотрим линеаризацию уравнения в окрестности нуля

$$n'(t) \approx -n(t - T) \quad (5)$$

Качественный анализ уравнения Хатчинсона III

$$n'(t) = -n(t - T) \quad (5)$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде решения Эйлера

$$n(t) = c e^{\lambda t}, \text{ где } c = \text{const.}$$

Подставляем решение $n(t) = c e^{\lambda t}$ в уравнение (5) и приходим к характеристическому уравнению для λ (*трансцендентное уравнение*)

$$\lambda = -e^{-\lambda T}.$$

Можно показать, что существует бесконечное число комплексных решений характеристического уравнения для моделей с запаздывающим аргументом.

Мюррей, Математическая биология, Введение, Раздел 1.4, 2009

В простых случаях решения характеристических уравнений для моделей с запаздывающим аргументом можно строить с помощью *функции Ламберта* (ProductLog в *Mathematica*).

Качественный анализ уравнения Хатчинсона IV

$$\lambda = - e^{-\lambda T}$$

Для анализа устойчивости важно понять, при каких условиях справедливо, что $\operatorname{Re} \lambda < 0$, что будет соответствовать экспоненциальному стремлению к нулю решения $n(t)$.

Пусть $\lambda = \mu + i\omega$. Подставим в характеристическое уравнение

$$\mu + i\omega = - e^{-(\mu+i\omega)T}$$

и запишем по-отдельности соотношения для действительной и мнимой части

$$\begin{aligned}\mu &= -e^{-\mu T} \cos(\omega T) \\ \omega &= e^{-\mu T} \sin(\omega T)\end{aligned}$$

Отметим свойство уравнения $\omega = e^{-\mu T} \sin(\omega T)$: если ω^* является решением уравнения, то и $-\omega^*$ тоже является решением. Исследуем в дальнейшем два случая: $\omega = 0$ и $\omega > 0$.

Качественный анализ уравнения Хатчинсона V

$$\begin{aligned}\mu &= -e^{-\mu T} \cos(\omega T) \\ \omega &= e^{-\mu T} \sin(\omega T)\end{aligned}$$

Случай 1: $\omega = 0$ ($\lambda = \mu + 0i$)

Первое уравнение примет вид $\mu = -e^{-\mu T}$, второе уравнение удовлетворяется тождественно.

При условии, что $T > 0$, имеем, что $\mu < 0$, следовательно $\operatorname{Re} \lambda < 0$ и неустойчивость не возникает.

Мюррей, Математическая биология, Введение, Раздел 1.4, 2009

Качественный анализ уравнения Хатчинсона VI

$$\begin{aligned}\mu &= -e^{-\mu T} \cos(\omega T) \\ \omega &= e^{-\mu T} \sin(\omega T)\end{aligned}$$

Случай 2: $\omega > 0$ ($\lambda = \mu + i\omega$)

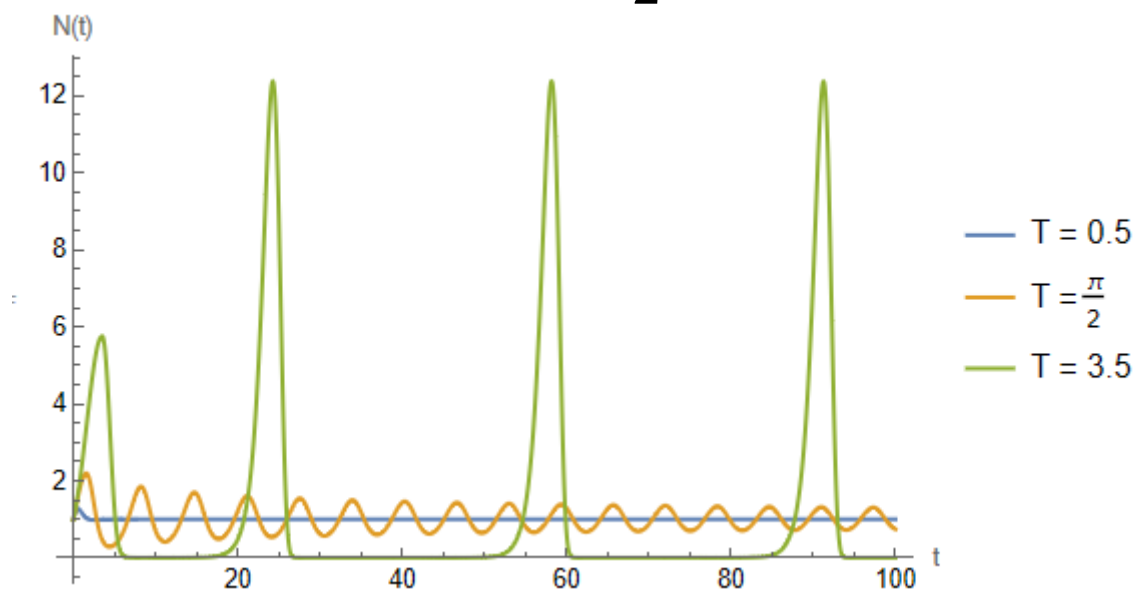
Если $\omega T < \frac{\pi}{2}$, тогда $\cos(\omega T) > 0$, следовательно $\mu < 0$, неустойчивость не возникает.

Если $\omega T = \frac{\pi}{2}$, тогда $\mu = 0$, а $\omega = 1$. Следовательно $T = \frac{\pi}{2}$ ($\operatorname{Re} \lambda = 0$) является точкой перехода из устойчивого состояния, когда $\operatorname{Re} \lambda < 0$, в неустойчивое состояние, когда $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Мюррей, Математическая биология, Введение, Раздел 1.4, 2009

Качественный анализ уравнения Хатчинсона VII

Вывод на основании линейного анализа устойчивости: положение равновесия $N(t) \equiv 1$ безразмерного уравнения Хатчинсона является устойчивым при $0 < T < \frac{\pi}{2}$ и неустойчивым при $T > \frac{\pi}{2}$.



Обратите внимание, что величина запаздывания T оказывает влияние на качественное поведение решения уравнения Хатчинсона.

Качественный анализ уравнения Хатчинсона VIII

В размерных переменных условием устойчивости положения равновесия $N(t) \equiv N_p$ уравнения Хатчинсона является

$$0 < kT < \frac{\pi}{2}.$$

Обратите внимание, что характер устойчивости положения равновесия $N(t) \equiv N_p$ определяется значениями параметров уравнения k и T .

Запаздывание в системном анализе

Если в точке принятия решения в системе (ею также может быть человек, если он — часть системы) дается отклик на сигнал, поступивший с запаздыванием, или сигнал пришел вовремя, но отклик дается с задержкой, то принятое решение будет заведомо неэффективным. Воздействие окажется либо слишком сильным, либо недостаточным для достижения цели. С другой стороны, если воздействие оказывать слишком быстро, это может усилить краткосрочные случайные флуктуации и тем самым увеличить неустойчивость.

Если в циклах обратной связи есть длительные запаздывания, то для управления системой необходимо умение предвидеть. К тому моменту, когда проблема станет очевидной, основные возможности решить ее уже будут упущены.

Если запаздывание в системе можно сделать больше или меньше, то это можно использовать как мощный рычаг воздействия на систему.

Подозреваю, что большая часть проблем в системах связана именно с искажением, запаздыванием или отсутствием части информации.

Д. Медоуз, Азбука системного мышления, 2008