

Математическое моделирование динамических процессов I

Дисциплина для студентов специальности
«Компьютерная математика и системный анализ»

доц. Лаврова О.А.

механико-математический факультет, БГУ, Минск

2025

Тема 2. Математические модели колебательных явлений Часть 2

Математический маятник является объектом моделирования в Теме 2 (Часть 2),

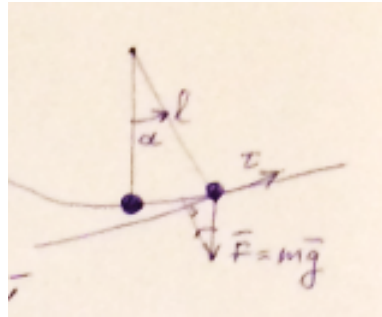
как пример **механической системы**,
совершающей колебания

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Качественный анализ *нелинейной* динамической системы
4. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
5. Математическая модель
6. Качественный анализ *нелинейной* динамической системы
7. Структурная неустойчивость

Концептуальная постановка задачи I

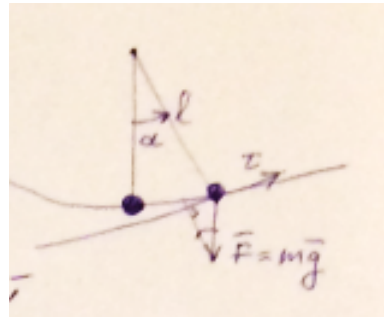
Математический маятник – это физическое тело массы m , которое подвешено на конце *невесомого* и *нерастяжимого* стержня длины ℓ к неподвижной опоре



Допущение 1: тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной стержня, поэтому принимаем его за **материальную точку**

Концептуальная постановка задачи II

Тело качается в фиксированной вертикальной плоскости. Обозначим через $\alpha(t)$ угол отклонения от вертикального положения равновесия $\alpha = 0$. Будем считать, что $\alpha(t) > 0$ при отклонении против часовой стрелки.



Допущение 2: тело находится под действием силы тяжести

$$\mathbf{F} = m \mathbf{g},$$

где $\mathbf{g}$ -- вектор ускорения свободного падения.

Концептуальная постановка задачи III

*Допущение 3: силой сопротивления среды пренебрегаем, т.е. тело движется **без трения**.*

Важно отметить, что допущение об отсутствии трения справедливо только для небольших промежутков времени моделирования.

Полагая, что в некоторый момент времени $t = 0$ стержень отклонился на угол α_0 и телу сообщили угловую скорость ω_0 , требуется определить угол отклонения стержня $\alpha(t)$ как функцию времени.

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. **Построение математической модели**
3. Уравнение математического маятника
4. Качественный анализ нелинейной динамической системы
5. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
6. Математическая модель
7. Качественный анализ нелинейной динамической системы
8. Структурная неустойчивость

Математическая модель

Рассмотрим три способа построения *детерминированной* математической модели

1. на основании **второго закона Ньютона**;
2. на основании **закона сохранения энергии** (это возможно, так как сделано допущение, что тело движется без трения);
3. на основании **вариационного принципа** наименьшего действия.

Важно отметить, что различные способы построения должны привести к одной и той же математической модели (универсальность ММ)

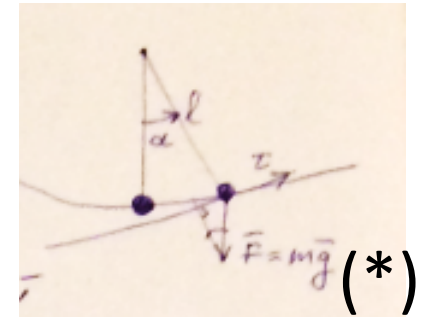
Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

где m – масса тела, $\mathbf{a}$ – ускорение, $\mathbf{F}$ – сила, действующая на тело. Рассмотрим проекцию на направление касательного вектора к траектории движения $ma_\tau = F_\tau$.

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = [s = \ell \alpha] = \ell \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, F_\tau = -mg \sin \alpha \Rightarrow$$
$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\alpha) = 0$$



Уравнение (*) называется **уравнением свободных колебаний математического маятника**.

Уравнение определяется двумя параметрами:
ускорением свободного падения $g := |\mathbf{g}| = \text{const} > 0$ и
длиной стержня $\ell = \text{const} > 0$.

Уравнение свободных колебаний маятника

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\alpha) = 0 \quad (*)$$

Обобщение: уравнение вида

$$m \frac{d^2r}{dt^2} + \mu(r) \frac{dr}{dt} + f(r) = 0$$

рассматривается как **основное уравнение нелинейной механики**, где $-\mu(r) \frac{dr}{dt}$ – демпфирующая сила, $-f(r)$ – восстанавливающая сила.

Уравнение (*) можно интерпретировать, как уравнение, описывающее прямолинейное движение тела единичной массы без демпфирующей силы под действием восстанавливающей силы $-\frac{g}{\ell} \sin(\alpha)$.

Закон сохранения энергии I

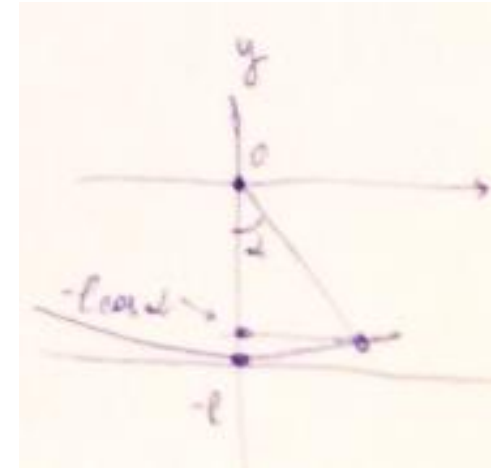
При отсутствии трения полная механическая энергия E сохраняет значение во времени, т.е.

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

В этом случае механическую систему называют **консервативной**.

Закон сохранения энергии II

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} = 0 &\Rightarrow \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\left(\frac{mv^2}{2} + \left(-\int_{-\ell}^{-\ell \cos \alpha} -mg dy\right)\right)}{dt} = 0 \Rightarrow \\ \frac{d\left(\frac{m\ell^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}{2} + mg\ell(1 - \cos \alpha)\right)}{dt} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\ell^2}{2} 2 \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + g\ell \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} &= 0 \Rightarrow\end{aligned}$$



$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\alpha) = 0.$$

Вариационный принцип наименьшего действия

Вариационный принцип наименьшего действия может быть записан в форме Лагранжа, Якоби или Гамильтона.

Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона: из всех допустимых траекторий движения механической системы между моментами времени t_1 и t_2 выбирается движение, доставляющее минимум **функционалу действия**

$$S[\alpha] := \int_{t_1}^{t_2} L(\alpha(t), \alpha'(t)) dt,$$

где $L(\alpha, \alpha')$ -- **функция Лагранжа** для механической системы.

В простейшем случае функция Лагранжа определяется разностью кинетической и потенциальной энергий $L(\alpha, \alpha') = E_k - E_p$.

Принцип Гамильтона принимает вид

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} S(\alpha(t) + \varepsilon \varphi(t)) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

где $\varphi(t)$ – пробная функция такая, что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$; $\alpha(t) + \varepsilon \varphi(t)$ – **вариация** произвольного движения, при этом $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ не зависят от $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Вариационный принцип II

12. Рассмотрим движение, происходящее в инерциальной системе отсчета.

Функция Лагранжа $L(\alpha, \frac{d\alpha}{dt}) = T_k - U_k = \frac{m\ell^2}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + mg\ell \cos(\alpha)$

$\forall \varphi: \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$, $S(\alpha + \epsilon\varphi) = m\ell \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\ell}{2} \left(\frac{d(\alpha + \epsilon\varphi)}{dt} \right)^2 + g \cos(\alpha + \epsilon\varphi) \right) dt$

$\frac{d}{d\epsilon} S(\alpha + \epsilon\varphi) = m\ell \int_{t_1}^{t_2} \left(\ell \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \ell \epsilon \frac{d^2\varphi}{dt^2} - g \sin(\alpha + \epsilon\varphi) \varphi \right) dt$

$\frac{d}{d\epsilon} S(\alpha + \epsilon\varphi) \Big|_{\epsilon=0} = m\ell \int_{t_1}^{t_2} \left(\ell \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - g \sin(\alpha) \varphi \right) dt = \left[\begin{array}{l} \text{применение к интегралу} \\ \text{свойства функции и интеграла} \end{array} \right]$

$= m\ell \left(- \int_{t_1}^t \ell \frac{d^2\alpha}{dt^2} \varphi dt + \ell \frac{d\alpha}{dt} \varphi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} g \sin(\alpha) \varphi dt \right)$

Согласно принципу Гамильтона

$\int_{t_1}^{t_2} \left(\ell \frac{d^2\alpha}{dt^2} \varphi + g \sin(\alpha) \varphi \right) dt = 0 \quad \forall \varphi: \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0 \Rightarrow$

$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\alpha) = 0$

4. ... (1) ... в элементарных функциях.

Уравнение математического маятника

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\alpha) = 0 \quad (*)$$

Уравнение (*) не интегрируется в элементарных функциях. Аналитическое решение уравнения (*) выражается через эллиптические функции.

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. **Качественный анализ нелинейной динамической системы**
4. Концептуальная постановка задачи для модели «хищник-жертва»
5. Математическая модель
6. Качественный анализ нелинейной динамической системы
7. Структурная неустойчивость

Качественный анализ I

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\alpha) = 0 \quad (*)$$

Запишем уравнение (*) в виде динамической системы относительно двух неизвестных: угла поворота α и угловой скорости ω

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{\ell} \sin(\alpha). \end{cases}$$

Положения равновесия: $\omega = 0, \alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Качественный анализ II

В качестве фазового пространства рассмотрим координатную плоскость (α, ω) . Фазовая плоскость содержит бесконечное число особых точек вида $(\pi n, 0), n \in \mathbb{Z}$.

Для построения дифференциального уравнения фазовых траекторий разделим уравнение $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{\ell} \sin(\alpha)$ на уравнение $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$. Имеем

$$\omega d\omega = -\frac{g}{\ell} \sin(\alpha) d\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{\ell} \cos(\alpha) + \text{const.}$$

Из уравнения фазовых траекторий имеем, что $\text{const} \geq -\frac{g}{\ell}$.

Качественный анализ III

Уравнение фазовых траекторий динамической системы «математический маятник»

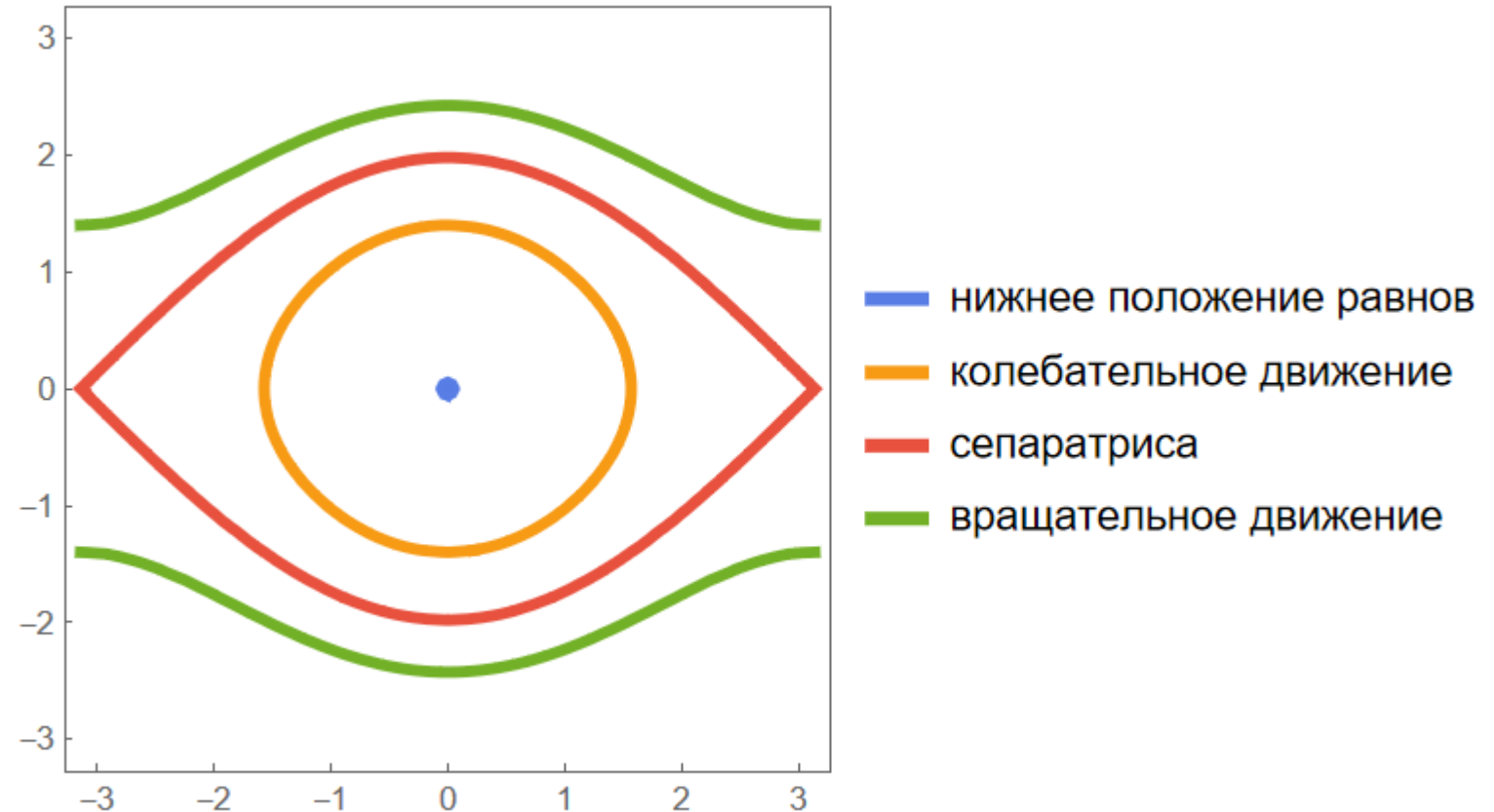
$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{\ell} \cos(\alpha) + \text{const} \quad \text{или} \quad \omega = \pm 2 \sqrt{\frac{g}{\ell} \cos(\alpha) + \text{const}},$$

где $-\frac{g}{\ell} \leq \text{const}$.

Качественное описание поведения математического маятника:

1. При определенных начальных условиях, когда $-\frac{g}{\ell} \leq \text{const} < \frac{g}{\ell}$, фазовые траектории будут замкнутыми. Для консервативных систем это соответствует **незатухающим колебаниям** вокруг положений равновесия вида $\alpha_0 = 0 + 2\pi n$, $\omega_0 = 0$ (**нижние положения равновесия**).
2. При определенных начальных условиях, когда $\text{const} > \frac{g}{\ell}$, фазовые траектории будут волнистыми линиями. Это соответствует **вращательному движению** маятника вокруг точки подвеса с неограниченным возрастанием угла α .
3. Существует фазовая траектория (*сепаратриса*), которая отделяет два типа движения при $\text{const} = \frac{g}{\ell}$. Сепаратриса содержит все положения равновесия $\alpha_0 = \pi + 2\pi n$, $\omega_0 = 0$, соответствующие положению математического маятника над точкой подвеса (**верхние положения равновесия**).

Качественный анализ IV



<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9%D0%BC%D0%B0%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA>

Двухвидовая система «хищник-жертва»
(predator-prey)
является объектом моделирования в Теме 2,
как пример биологической системы,
совершающей колебания

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для математического маятника
2. Построение математической модели
3. Уравнение математического маятника
4. Качественный анализ нелинейной динамической системы
5. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
6. Математическая модель
7. Качественный анализ нелинейной динамической системы
8. Структурная неустойчивость

Концептуальная постановка задачи I

Допущение 1: в изолированной неизменной среде обитания живут популяции двух биологических видов: хищники (predator) и жертвы (prey), которые взаимодействуют друг с другом.

Хищники питаются жертвами. Жертвы питаются продуктами среды, имеющимися в достаточном количестве.

Количественный характер борьбы за существование проявляется в виде изменений численности индивидуумов разных популяций.

Полагаем, что численность популяций хищников $M = M(t) \geq 0$ и жертв $N = N(t) \geq 0$ зависят только от времени.

Концептуальная постановка задачи II

Допущение 2: при отсутствии взаимодействия между видами численности хищников и жертв изменяются согласно **модели Мальтуса**:

при отсутствии жертв смертность хищников доминирует над рождаемостью; численность хищников убывает экспоненциально до 0:

$$\frac{dM}{dt} = -\beta M, \quad \beta = \text{const} > 0$$

при отсутствии хищников рождаемость жертв доминирует над смертностью; численность жертв растет экспоненциально:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \quad \alpha = \text{const} > 0$$

Концептуальная постановка задачи III

Допущение 3: вероятность взаимодействия двух видов пропорциональна как численности хищников M , так и численности жертв N , т.е.

$$\frac{dM}{dt} \sim MN, \quad \frac{dN}{dt} \sim MN.$$

Каждый акт взаимодействия увеличивает численность хищников и уменьшает численность жертв, т.е.

$$\frac{dM}{dt} \sim dNM, \quad \frac{dN}{dt} \sim -cNM,$$

где $c = \text{const} > 0$, $d = \text{const} > 0$.

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Уравнение математического маятника
4. Качественный анализ нелинейной динамической системы
5. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
6. **Математическая модель**
7. Качественный анализ нелинейной динамической системы
8. Структурная неустойчивость

Математическая модель I

Приходим к математической модели для описания численности двух видов в виде нелинейной динамической системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\beta M + dMN, \\ \frac{dN}{dt} = \alpha N - cMN, \end{cases} \quad (**)$$

где $\alpha, \beta, c, d = \text{const} > 0$.

Система (**) называется **система Лотки-Вольтерра** или **модель «хищник-жертва»**. Это одна из наиболее известных моделей в теории популяций.

Математическая модель II

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\beta M + dMN, \\ \frac{dN}{dt} = \alpha N - cMN, \end{cases} \quad (**)$$

где $\alpha, \beta, c, d = \text{const} > 0$.

Модель была построена **Альфредом Лотка** (американский математик, химик) в 1920 году для описания химической реакции с периодическим изменением концентрации двух веществ.

Модель была построена **Вито Вольтерра** (итальянский математик, основатель математической теории популяций) в 1926 году для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море.

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Уравнение математического маятника
4. Качественный анализ нелинейной динамической системы
5. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
6. Математическая модель
7. **Качественный анализ нелинейной динамической системы**
8. Структурная неустойчивость

Анализ нелинейной ДС I

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\beta M + dMN, \\ \frac{dN}{dt} = \alpha N - cMN. \end{cases} \quad (**)$$

Положения равновесия ДС (**) определяются из решения системы уравнений

$$\begin{cases} M(-\beta + dN) = 0 \\ N(\alpha - cM) = 0 \end{cases}$$

Имеем два положения равновесия

$$M^* = 0, N^* = 0 \text{ и } M^* = \frac{\alpha}{c}, N^* = \frac{\beta}{d}.$$

Анализ нелинейной ДС II

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\beta M + dMN, \\ \frac{dN}{dt} = \alpha N - cMN. \end{cases} \quad (**)$$

Рассмотрим особую точку $N^* = 0, M^* = 0$ и исследуем ее устойчивость **методом линеаризации** в окрестности особой точки

$$\frac{dx}{dt} \approx Ax, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, x = (M, N),$$
$$\lambda_1 = -\beta, \lambda_2 = \alpha \Rightarrow$$

Положение равновесия $x = 0$ является **седлом**. Седло всегда неустойчивое, следовательно вымирание обоих видов маловероятно.

Анализ нелинейной ДС III

Рассмотрим особую точку $M^* = \frac{\alpha}{c}, N^* = \frac{\beta}{d}$ и исследуем ее устойчивость **методом линеаризации** в окрестности особой точки. Линеаризованная динамическая система называется **системой первого приближения**.

Сделаем замену переменных $\tilde{N} = N - \frac{\beta}{d}, \tilde{M} = M - \frac{\alpha}{c}$

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(\alpha - cM) \\ \frac{dM}{dt} = M(-\beta + dN) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\tilde{N}}{dt} = (\tilde{N} + \frac{\beta}{d})(-c\tilde{M}) \\ \frac{d\tilde{M}}{dt} = (\tilde{M} + \frac{\alpha}{c})d\tilde{N} \end{cases} \xrightarrow{\text{линеар.}} \begin{cases} \frac{d\tilde{N}}{dt} \approx -\frac{c\beta}{d}\tilde{M} \\ \frac{d\tilde{M}}{dt} \approx \frac{d\alpha}{c}\tilde{N} \end{cases}$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c\beta}{d} \\ \frac{d\alpha}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 + \alpha\beta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\beta}$$

т.к. $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow$ метод линеаризации не работает, т.е. по линейному приближению нельзя исследовать эту особую точку и ее устойчивость.

Фазовые траектории I

Построим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

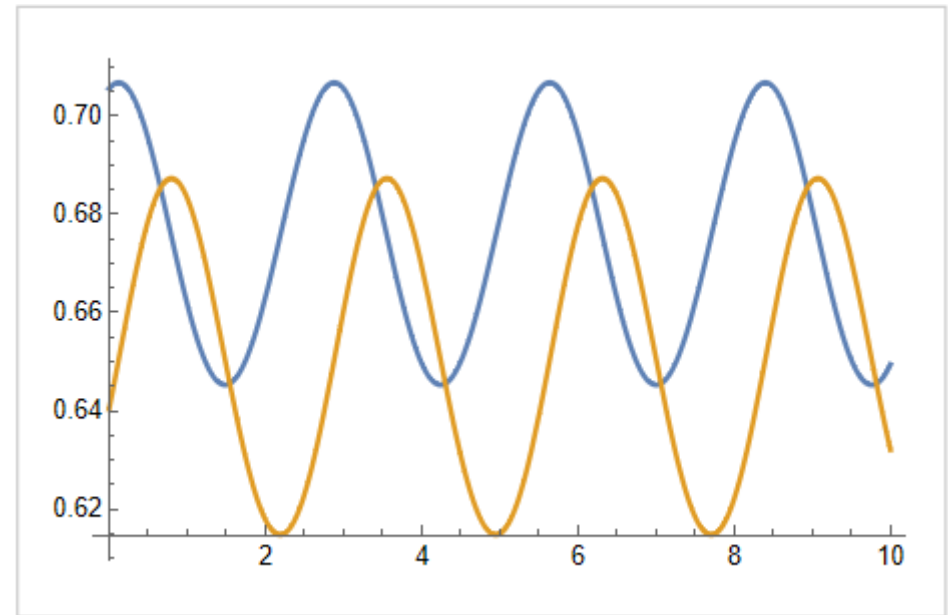
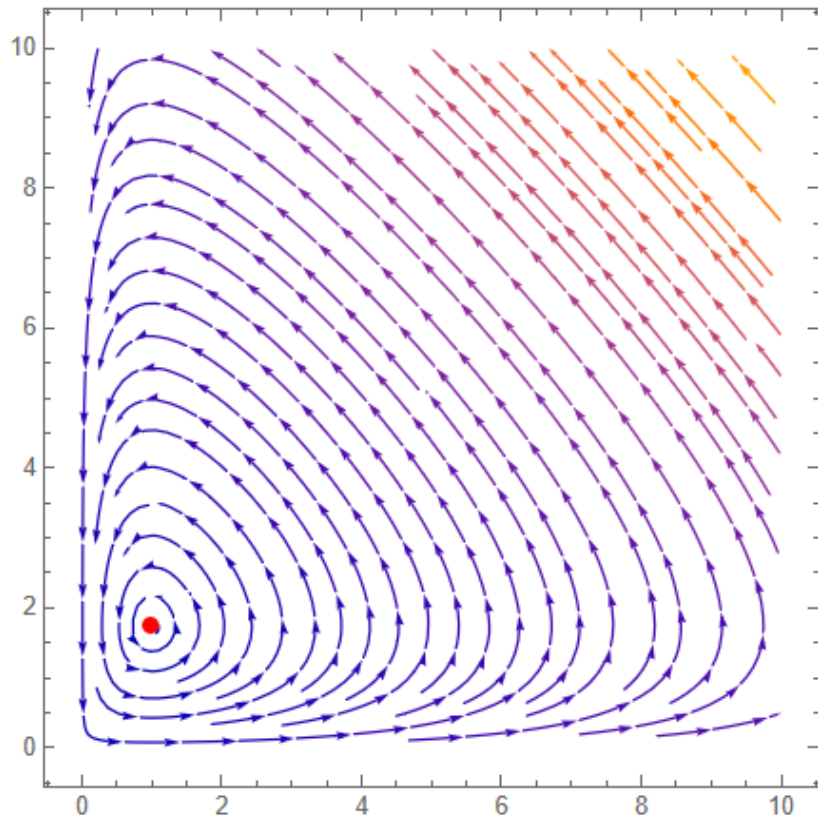
$$\frac{dN}{dM} = \frac{N(\alpha - cM)}{M(-\beta + dN)} \Rightarrow \frac{dN(-\beta + dN)}{N} = \frac{dM(\alpha - cM)}{M} \Rightarrow$$

$$-\beta \ln(N) + dN = \alpha \ln(M) - cM + \text{const}, \quad M > 0, N > 0$$

$$M^\alpha N^\beta e^{-cM-dN} = \text{const}$$

Фазовые траектории II

На фазовом портрете можно увидеть, что в окрестности нетривиального положения равновесия система совершает **незатухающие колебания**. При этом максимум жертв не совпадает с максимумом хищников, т.е. колебания в популяциях происходят в разных фазах.



Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Уравнение математического маятника
4. Качественный анализ нелинейной динамической системы
5. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
6. Математическая модель
7. Качественный анализ нелинейной динамической системы
8. Структурная неустойчивость

Структурная неустойчивость I

Система Лотки-Вольтерра (**) является **структурно неустойчивой**: при малом изменении модели, когда к правым частям добавляются малые члены (например, за счет миграции популяции или деятельности человека), вывод о периодичности решения становится некорректным, так как качественное поведение системы изменяется

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\beta M + dMN + \varepsilon f_2(M, N), \\ \frac{dN}{dt} = \alpha N - cMN + \varepsilon f_1(M, N), \end{cases}$$

где $\varepsilon \ll 1$.

Структурная неустойчивость II

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\beta M + dMN, \\ \frac{dN}{dt} = \alpha N - cMN. \end{cases} \quad (**)$$

В силу структурной неустойчивости система Лотки-Вольтерра (**) *редко применяется в реальности* для описания взаимодействия популяций, так как количественные оценки модели могут не согласовываться с реальными данными.

Существуют многочисленные модификации модели «хищник-жертва» (**), в том числе приводящие к структурно устойчивым системам.