Математическое моделирование динамических процессов I

Дисциплина для студентов специальности
«Компьютерная математика и системный анализ»

доц. Лаврова О.А.

механико-математический факультет, БГУ, Минск

2025

Тема 2. Математические модели колебательных явлений

Колебания

Колебания – это периодические изменения во времени некоторых характеристик объекта моделирования.

Колебания могут быть различной природы:

- *механические колебания*
- колебания в электрических цепях
- *химические колебания*
- *биологические колебания* и т.д.

Пружинный осциллятор является объектом моделирования в Теме 2,

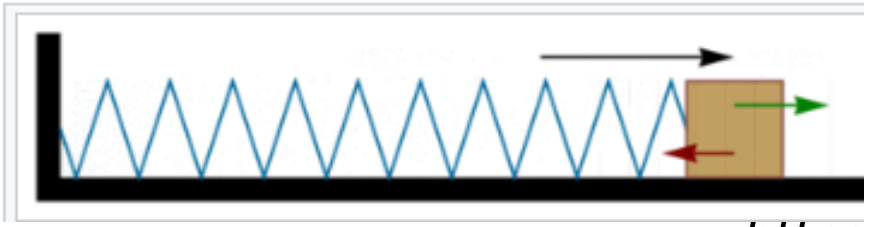
как пример **механической системы**, совершающей колебания

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
3. Уравнение гармонического осциллятора
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Концептуальная постановка задачи I

Пружинный осциллятор – это физическое тело массы *m*, которое находится на одном конце пружины, второй конец пружины жестко закреплен.



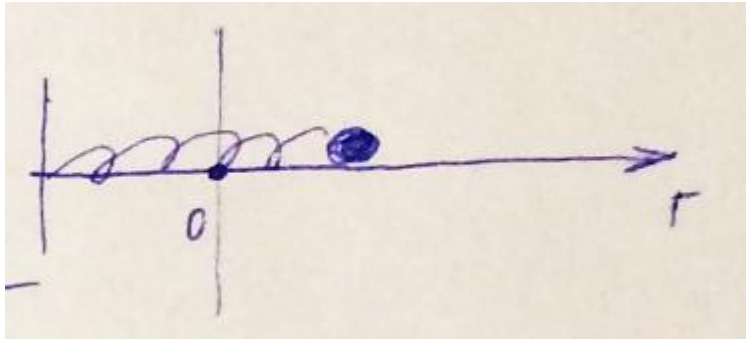
https://ru.wikipedia.org/wiki/...

Допущение 1: тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной пружины, поэтому принимаем его за ***материальную точку.***

Допущение 2: масса пружины значительно меньше массы тела, поэтому массой пружины пренебрегаем**.**

Концептуальная постановка задачи II

Тело движется вперед или назад по горизонтальной поверхности. Обозначим через $r(t)$ координату тела вдоль оси пружины относительно положения равновесия $r = 0$, когда пружина не сжата и не растянута, т.е. находится в состоянии покоя. Будем считать, что $r(t) > 0$, когда пружина растянута и $r(t) < 0$, когда она сжата.



Концептуальная постановка задачи III

Допущение 3: тело находится под действием силы упругости пружины. Сила упругости описывается **законом Гука**

$$F = -k\,r,$$

где $k = const > 0$ обозначает жесткость пружины или коэффициент упругости. Сила упругости направлена в сторону уменьшения деформации пружины, поэтому выражение для силы содержит знак «−».

Важно отметить, что закон Гука относится к феноменологическим законам природы и справедлив только при небольших отклонениях пружины от ее положения равновесия $r \equiv 0$.

Концептуальная постановка задачи IV

Допущение 4: пружинный осциллятор движется ***без трения***.

Важно отметить, что допущение об отсутствии трения справедливо только для небольших промежутков времени моделирования.

Полагая, что в некоторый момент времени $t = 0$ пружину растянули на величину r_0 и сообщили телу скорость v_0, требуется определить координату тела $r(t)$ как функцию времени.

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
3. Уравнение гармонического осциллятора
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Математическая модель

Рассмотрим три способа построения *детерминированной* математической модели:

1. на основании **второго закона Ньютона**;
2. на основании **закона сохранения энергии** (это возможно, так как сделано допущение, что тело движется без трения);
3. на основании **вариационного принципа** наименьшего действия.

Важно отметить, что различные способы построения должны привести к одной и той же математической модели (универсальность ММ)

Модель на основе второго закона Ньютона

На основании второго закона Ньютона

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F},$$

где m – масса тела, $\boldsymbol{a}$ – ускорение, $\boldsymbol{F}$ – сила, действующая на тело, имеем

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr. \qquad (*)$$

Дифференциальное уравнение (*) называется **уравнением пружинного осциллятора**. Осциллятор – колебательная система.

Уравнение пружинного осциллятора (*) определяется двумя параметрами: массой тела $m = const > 0$ и коэффициентом упругости $k = const > 0$.

Модель на основе закона сохранения энергии

При отсутствии трения полная механическая энергия E сохраняет свое значение во времени, т.е.

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

В этом случае механическую систему называют **консервативной**.

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\left(\frac{mv^2}{2} + \left(-\int_0^r F dr\right)\right)}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{d\left(\frac{m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{2} + \frac{kr^2}{2}\right)}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{2} 2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{k}{2} 2r \frac{dr}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr = 0.$$

Модель на основе вариационного принципа I

Вариационный принцип наименьшего действия может быть записан в форме Лагранжа, Якоби или Гамильтона.

Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона: из всех допустимых траекторий движения $r(t)$ механической системы между моментами времени t_1 и t_2 выбирается движение, доставляющее минимум ***функционалу действия*** $S(r)$

$$S(r) \coloneqq \int_{t_1}^{t_2} L(r(t), r'(t))dt\,,$$

где $L(r, r')$ -- ***функция Лагранжа*** для исследуемой механической системы.

В простейшем случае функция Лагранжа определяется разностью кинетической и потенциальной энергий $L(r, r') = E_k - E_p$.

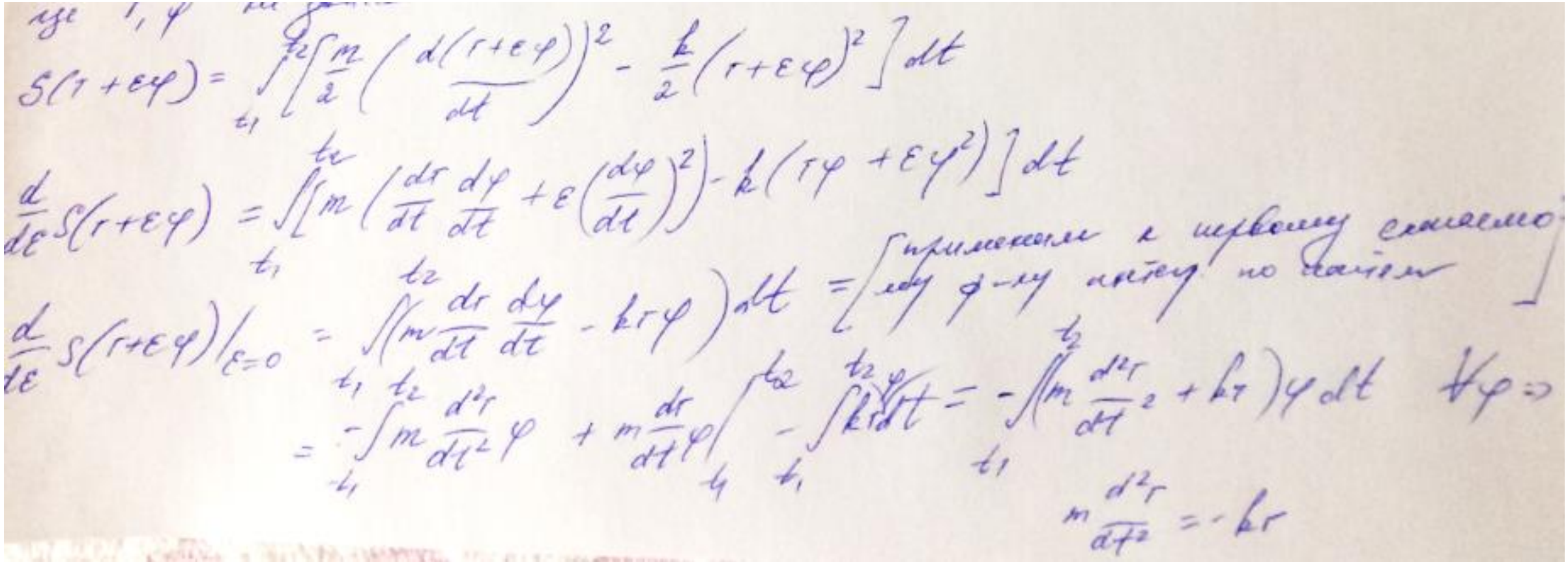
Принцип Гамильтона нахождения минимума функционала действия принимает вид

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} S(r(t) + \varepsilon\varphi(t))\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} = 0,$$

где $\varphi(t)$ – произвольная функция такая, что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$; $r(t) + \varepsilon\varphi(t)$ называется ***вариацией*** произвольного движения, при этом $r(t)$ и $\varphi(t)$ не зависят от $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Модель на основе вариационного принципа II

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon}S(r(t)+\varepsilon\varphi(t))\right)\Big|_{\varepsilon=0}=0$$



Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
3. Уравнение гармонического осциллятора
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Уравнение гармонического осциллятора I

Рассмотрим уравнение пружинного осциллятора (*)

$$m\frac{d^2r}{dt^2} + kr = 0.$$

Перезапишем уравнение:

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \omega^2 r = 0, \qquad (**)$$

где $\omega = \sqrt{k/m} = \text{const} > 0$.

Характеристическое уравнение для (**) имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Тогда общее решение уравнения (**) имеет вид

$$r(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\,.$$

По виду решения получаем, что *параметр ω определяет частоту колебаний осциллятора*. Постоянные интегрирования A и B определяются из начальных условий.

Уравнение (**) называют **уравнением гармонического одномерного осциллятора, уравнением гармонических колебаний, уравнением свободных колебаний** (т.к. отсутствует внешняя сила).

Это пример *простейшей колебательной системы* с единственным параметром $\omega = \text{const} > 0$.

Уравнение гармонического осциллятора II

Систему, не обязательно механическую, процессы в которой описываются уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

называют **гармоническим осциллятором**. Решение может быть записано в виде

$$x(t) = C\cos(\omega t + \varphi_0) = C\,\mathrm{Re}(e^{i\omega t}e^{i\varphi_0})$$

где C – амплитуда колебаний, ω – частота колебаний, φ_0 – фаза.

Амплитуда колебаний C зависит от начальных данных r_0 и v_0, но не зависит от времени. Частота колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$ не зависит от начальных данных и называется **собственной частотой**. Период колебаний $T = 2\pi/\omega$ не зависит от начальных данных и времени.

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
3. Уравнение гармонического осциллятора
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Качественный анализ линейной ДС I

Введем замену переменных $v = \frac{dr}{dt}$. Тогда уравнение гармонического осциллятора примет вид $\frac{dv}{dt} = -\omega^2 r$. Сформулируем линейную ДС, соответствующую уравнению гармонического осциллятора

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \quad \text{где } \boldsymbol{x} = (r, v), A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положение равновесие ДС $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Для исследования устойчивости положения равновесия по теореме Ляпунова найдем собственные значения матрицы A

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Так как собственные значения матрицы линейной динамической системы являются комплексно-сопряженными и $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} = 0$, то положение равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ является **центром**. Центр всегда устойчивый, но не асимптотически устойчивый.

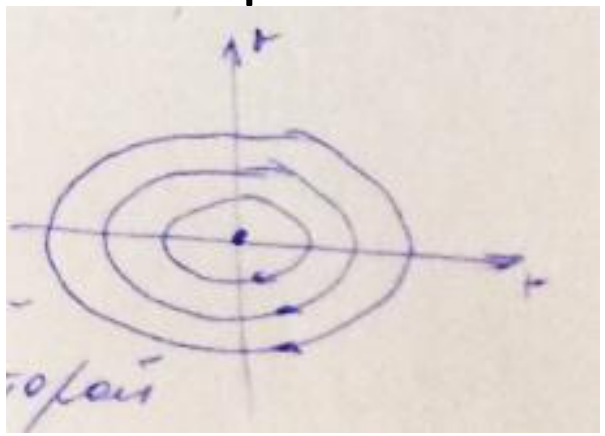
Качественный анализ линейной ДС II

В качестве фазового пространства рассмотрим координатную плоскость (r, v). Для построения дифференциального уравнения фазовых траекторий разделим уравнение $\frac{dv}{dt} = -\omega^2 r$ на уравнение $\frac{dr}{dt} = v$. Имеем

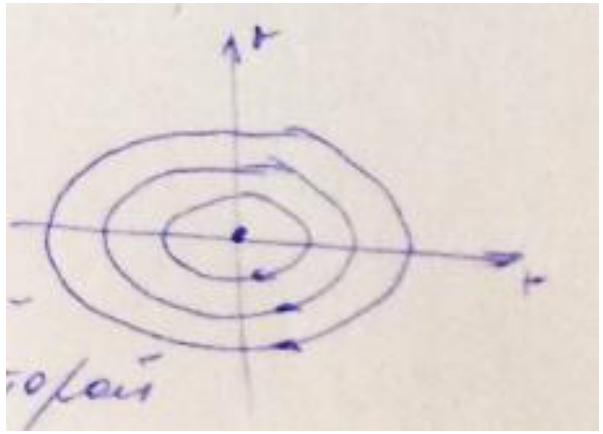
$$\frac{dv}{dr} = -\omega^2 \frac{r}{v} \quad \Longrightarrow \quad v\,dv = -\omega^2 r\,dr \quad \Longrightarrow \quad v^2 + \omega^2 r^2 = const \text{ или}$$

$$\frac{v^2}{\omega^2} + r^2 = const.$$

Фазовая плоскость заполняется вложенными друг в друга эллипсами с центрами в точке $(0,0)$. Точка $(0,0)$ является положением равновесия системы.



Качественный анализ линейной ДС III



Качественное описание поведения гармонического осциллятора: тело совершает малые колебания с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$ вблизи положения равновесия $r = 0, v = 0$ без достижения равновесия. Это процесс **незатухающих колебаний**.

Обобщение из теории ДУ: всякому периодическому движению консервативной системы соответствует движение по некоторой фиксированной траектории в фазовом пространстве, что соответствует незатухающим колебаниям системы.

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
3. Уравнение гармонического осциллятора
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Математическая модель с учетом силы трения I

Проиллюстрируем **иерархический подход к построению математической модели** для учета силы трения в модели пружинного осциллятора.

Предположим, что на тело действует сила трения, возникающая из-за сопротивления среды. В *предположении малых скоростей* движения сила трения описывается **формулой Стокса** (феноменологический закон природы)

$$F_{\text{тр}} = -\mu \frac{dr}{dt},$$

где $\mu = const > 0$ – динамическая вязкость среды (коэффициент трения). Сила трения действует противоположно направлению вектора скорости.

Математическая модель с учетом силы трения II

С учетом силы трения уравнение пружинного осциллятора изменяется

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr - \mu\frac{dr}{dt}$$

Система является неконсервативной, так как $\frac{dE}{dt} \neq 0$.

Обобщение: уравнение вида

$$m\frac{d^2r}{dt^2} + \mu(r)\frac{dr}{dt} + f(r) = 0$$

рассматривается как ***основное уравнение нелинейной механики****, где* $-\mu(r)\frac{dr}{dt}$ *– демпфирующая сила,* $-f(r)$ *– восстанавливающая сила.*

Математическая модель с учетом силы трения III

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr - \mu\frac{dr}{dt} \quad \text{или} \quad m\frac{d^2r}{dt^2} + \mu\frac{dr}{dt} + kr = 0$$

Рассмотрим уравнение пружинного осциллятора с учетом силы трения и построим его аналитическое решение.

Составим характеристическое уравнение $m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0$. Его корни $\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$,

где $\gamma = \mu/2m$.

При построении аналитического решения необходимо рассмотреть три случая $\gamma < \omega$ (комплексно-сопряженные корни), $\gamma = \omega$ (кратный корень) и $\gamma > \omega$ (вещественные корни).

Математическая модель с учетом силы трения IV

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr - \mu\frac{dr}{dt}$$

Соответствующая динамическая система

$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} = (r, v), A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}$.

Положение равновесие ДС $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Для исследования устойчивости положения равновесия по теореме Ляпунова найдем собственные значения матрицы A

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}.$$

При анализе собственных значений необходимо рассмотреть два случая $\gamma < \omega$ (**фокус**), $\gamma \geq \omega$ (**узел**). В обоих случаях $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, следовательно положение равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ является *асимптотически* устойчивым.

Математическая модель с учетом силы трения V

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Случай 1: $\gamma < \omega$, положение равновесия $r = 0, v = 0$ устойчивый фокус

$$r(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t\right)\right)$$

Это **затухающие колебания** с экспоненциально убывающей амплитудой $e^{-\gamma t}C$. Такие колебания соответствуют малому трению. Частота колебаний $\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ не зависит от начальных данных.

Математическая модель с учетом силы трения VI

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Случай 2: $\gamma = \omega$, положение равновесия $r = 0, v = 0$ устойчивый узел

$$r(t) = e^{-\gamma t}(A + B\ t)$$

Это **критическое затухание.** Решение не является колеблющимся. Оно является формальным разделением колебательного и апериодического поведения.

Математическая модель с учетом силы трения VII

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Случай 3: $\gamma > \omega$, положение равновесия $r = 0, v = 0$ устойчивый узел

$$r(t) = e^{-\gamma t}\left(A\, e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t} + B\, e^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t}\right)$$

Это **апериодическое затухание.** Такие колебания соответствуют большому трению

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
3. Уравнение гармонического осциллятора
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Математическая модель с учетом внешней силы I

Проиллюстрируем **иерархический подход к построению математической модели** для учета в модели пружинного осциллятора внешней периодической силы.

Предположим, что на тело действует внешняя сила

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_2 t),$$

где $\omega_2 = const > 0$ – ***внешняя частота***.

Математическая модель вынужденных колебаний имеет вид:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F_0 \sin(\omega_2 t)$$

Математическая модель с учетом внешней силы II

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F_0\sin(\omega_2 t)$$

Общее решение уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения $r_0(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ и частного решения $r_*(t)$, т. е. $r(t) = r_0(t) + r_*(t)$. Другими словами общее решение является суперпозицией двух колебаний с собственной частотой ω и с вынужденной частотой ω_2.

Для построения частного решения $r_*(t)$ необходимо рассмотреть нерезонансный случай ($\omega \neq \omega_2$) и резонансный случай ($\omega = \omega_2$).
Резонанс – это усиление *собственных колебаний* системы под действием *внешних колебаний* той же частоты.

Явление резонанса впервые было описано Г. Галилеем в 1602 году в работах, посвященных исследованию маятников и музыкальных струн.

Математическая модель с учетом внешней силы III

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F_0\sin(\omega_2 t)$$

Правая часть ДУ является действительным квазиполиномом $e^{\alpha t}\left(P_{m_1}(t)\cos(\beta t) + Q_{m_2}(t)\sin(\beta t)\right)$ при $\alpha = 0, \beta = \omega_2$.

Возможны две ситуации:

1. отсутствие резонанса, когда $\omega \neq \omega_2$; частное решение $r_*(t) = C_1\sin(\omega_2 t)$
2. резонанс, когда $\omega = \omega_2$; частное решение $r_*(t) = t(C_1\sin(\omega_2 t) + C_2\cos(\omega_2 t))$

Рассмотрим первую ситуацию. Подставим частное решение в уравнение, чтобы найти неизвестную константу C_1:

$$-mC_1\omega_2^2 = -kC_1 + F_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{F_0}{k - m\,\omega_2^2} \quad \Rightarrow \quad r_*(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_2^2)}\sin(\omega_2 t)$$

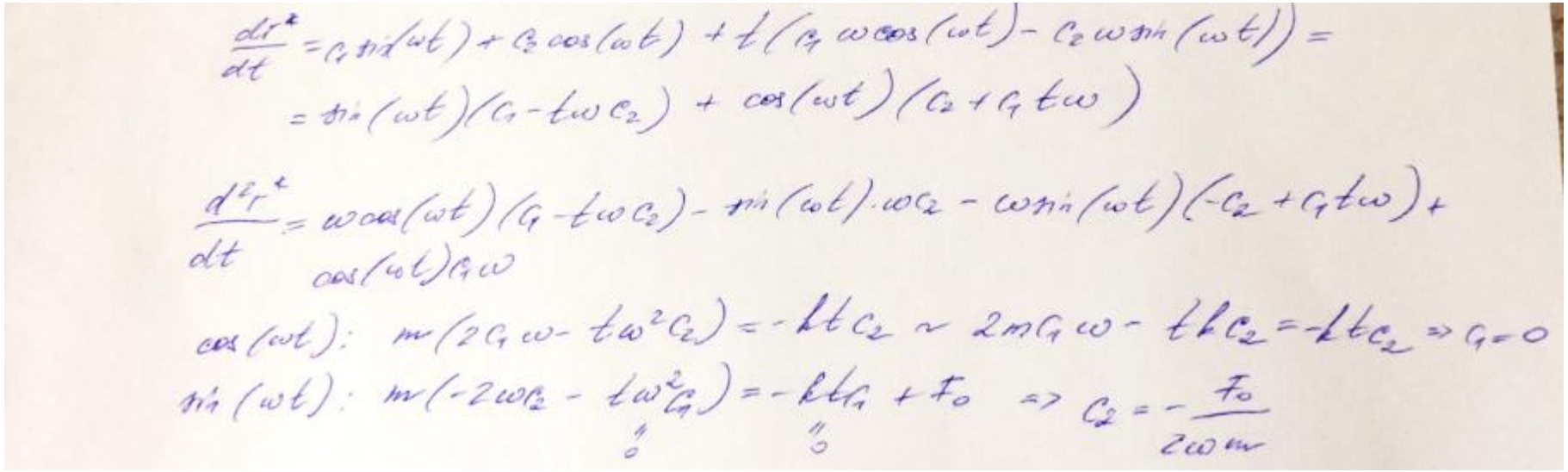
см. стр. 177—179 в [Прохорова, ОДУ, 2017]

Математическая модель с учетом внешней силы IV

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F_0\sin(\omega_2 t)$$

Рассмотрим ситуацию **резонанса**.

Подставим частное решение $r_*(t) = t(C_1\sin(\omega_2 t) + C_2\cos(\omega_2 t))$ в уравнение, чтобы найти неизвестные константы C_1 и C_2:



$$r_*(t) = -t\frac{F_0}{2\omega_2 m}\cos(\omega_2 t)$$