

Математическое моделирование динамических процессов I

Дисциплина для студентов специальности
«Компьютерная математика и системный анализ»

доц. Лаврова О.А.

механико-математический факультет, БГУ, Минск

2025

Цели дисциплины

- обучение методам и приемам **построения и анализа математических моделей**
- формирование системного подхода к организации процесса решения реальных задач средствами **математического моделирования**
- формирование умений сочетать аналитическое мышление, системное мышление и возможности **современных систем компьютерной математики** (*Mathematica*, MATLAB и др.) и языков программирования (Python, Julia и др.) для качественного и количественного описания и анализа объектов исследования в форме математических моделей

Тема 1.

Введение в математическое моделирование

Содержание Темы 1

1. Основные понятия
2. Классификация математических моделей
3. Этапы математического моделирования
4. Динамическая система

Модель

Модель – это материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал (система, процесс, явление), сохраняя *некоторые* свойства/характеристики объекта-оригинала, важные для данного исследования.

Модель является *приближенным представлением* объекта-оригинала.
Модель, как правило, проще объекта-оригинала.

При построении модели ... некоторые факты, известные лишь с некоторой долей вероятности или лишь с некоторой точностью, признаются «абсолютно» верными.

Арнольд

... all models are wrong, but some are useful

Box, 1979, Box and Draper, 1987

Моделирование

Моделирование – это процесс построения модели и проведения исследований модели с целью *изучить* некоторые свойства объекта-оригинала.

Объект-оригинал в дальнейшем будем называть *объектом моделирования*.

Моделирование – это *общенаучный метод познания* окружающего мира. При моделировании могут применяться практически все остальные методы познания.

- Эмпирические методы познания: наблюдение, эксперимент, измерение
- Теоретические методы познания: абстрагирование, идеализация, формализация, индукция, дедукция
- Общенаучные методы познания: **моделирование**, анализ, синтез, аналогия,

Математическое моделирование

Математическое моделирование – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта моделирования осуществляется на языке математики и средствами математики в виде *математической модели* относительно некоторых свойств объекта моделирования, а исследование модели проводится с использованием *математических методов*.

Трусов, 2005

Идеальное М. (vs. материальное) – мыслимая аналогия с объектом-оригиналом

Научное М. (vs. интуитивное) – логически обоснованное

Знаковое М. – в качестве моделей используются знаковые изображения, например, математические соотношения

Формальное М. – представление модели с помощью одного или нескольких формальных языков

Математическая модель

Математическая модель – это оператор $A: \Omega_X \rightarrow \Omega_Y$, позволяющий по значениям входных данных $X \in \Omega_X$ объекта моделирования установить значения выходных данных $Y \in \Omega_Y$.

Трусов, 2005

Элементами множеств Ω_X и Ω_Y могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.)

Оператором A может быть

- функция
- отображение в виде системы уравнений (ОДУ, ДУЧП, разностные и др.)
- вероятностное описание
- совокупность правил

Преимущества математического моделирования

Экономичность идеального моделирования – сбережение ресурсов, необходимых для проведения реальных экспериментов над объектом-оригиналом для его исследования (например, в экономике, в экологии).

Безопасность идеального моделирования – возможность изучения объектов-оригиналов, постановка экспериментов и наблюдения за которыми в реальных условиях затруднены или опасны (например, аварийные ситуации, астрофизические явления).

Экспериментирование для нового и сложного – возможность моделирования не реализованных в реальности объектов; возможность контролировать (ускорять, замедлять) время в процессе моделирования.

Универсальность математических моделей – различные объекты моделирования могут описываться одинаковыми математическими моделями. Изучая одну математическую модель, мы изучаем целый класс описываемых ею явлений.

Содержание Темы 1

1. Основные понятия
2. Классификация математических моделей
3. Этапы математического моделирования
4. Динамическая система

Классификация математических моделей

Возможные классификации:

- Линейные и нелинейные математические модели (признаком классификации является характеристика математических соотношений модели)
- Статические и динамические математические модели (признаком классификации является учет изменения во времени)
- Дискретные и непрерывные математические модели (признаком классификации является характеристика величин)
- др.

Классификация по цели моделирования

в зависимости от цели моделирования математические модели делятся на *deskриптивные модели, оптимизационные модели, управленческие модели.*

Целью *deskриптивных математических моделей* является установление закономерностей/зависимостей.

Целью *оптимизационных математических моделей* является определение оптимальных параметров объекта моделирования с точки зрения некоторого критерия.

Целью *управленческих математических моделей* является принятие решений в различных областях целенаправленной деятельности человека. Сложность модели связана с наличием неопределенностей, вид критерия оптимальности явно не фиксируется.

Трусов, 2005

Классификация по способу представления объекта моделирования

Объектом моделирования может быть *простой объект* или *объект-система*.

Для простого объекта моделирования не выделяются составляющие его элементы, не рассматривается внутренняя структура объекта, отражается только внешне воспринимаемое поведение.

Математические модели объектов-систем учитывают свойства и поведение отдельных элементов, из которых состоит система, а также учитывает взаимосвязи между элементами системы.

Трусов, 2005

Система – это совокупность взаимосвязанных элементов, выделенных из среды и взаимодействующих с окружающей средой как целое для достижения поставленной цели.

Классификация по определенности данных

в зависимости от определенности данных модели математические модели делятся на *детерминированные модели* или *вероятностные модели*.

Параметры *детерминированных моделей* определены своими значениями.

В *вероятностных моделях* отдельные параметры могут задаваться случайными величинами, описываться случайными процессами, функциями принадлежности нечетким множествам.

Трусов, 2005

Вероятностные модели изучаются с помощью методов теории вероятностей.

		Number of variables $\longrightarrow$				
		$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$	$n \gg 1$	Continuum
Nonlinearity $\downarrow$	Linear	<i>Growth, decay, or equilibrium</i> Exponential growth RC circuit Radioactive decay	<i>Oscillations</i> Linear oscillator Mass and spring RLC circuit 2-body problem (Kepler, Newton)	Civil engineering, structures Electrical engineering	<i>Collective phenomena</i> Coupled harmonic oscillators Solid-state physics Molecular dynamics Equilibrium statistical mechanics	<i>Waves and patterns</i> Elasticity Wave equations Electromagnetism (Maxwell) Quantum mechanics (Schrödinger, Heisenberg, Dirac) Heat and diffusion Acoustics Viscous fluids
	Nonlinear	Fixed points Bifurcations Overdamped systems, relaxational dynamics Logistic equation for single species	Pendulum Anharmonic oscillators Limit cycles Biological oscillators (neurons, heart cells) Predator-prey cycles Nonlinear electronics (van der Pol, Josephson)	<i>Chaos</i> Strange attractors (Lorenz) 3-body problem (Poincaré) Chemical kinetics Iterated maps (Feigenbaum) Fractals (Mandelbrot) Forced nonlinear oscillators (Levinson, Smale) Practical uses of chaos Quantum chaos ?	<i>The frontier</i> Coupled nonlinear oscillators Lasers, nonlinear optics Nonequilibrium statistical mechanics Nonlinear solid-state physics (semiconductors) Josephson arrays Heart cell synchronization Neural networks Immune system Ecosystems Economics	<i>Spatio-temporal complexity</i> Nonlinear waves (shocks, solitons) Plasmas Earthquakes General relativity (Einstein) Quantum field theory Reaction-diffusion, biological and chemical waves Fibrillation Epilepsy Turbulent fluids (Navier-Stokes) Life

Strogatz 1994

Содержание Темы 1

1. Основные понятия
2. Классификация математических моделей
- 3. Этапы математического моделирования**
4. Динамическая система

Процесс математического моделирования СОСТОИТ ИЗ ЭТАПОВ

1. Обследование. Разработка **содержательной постановки задачи** моделирования в форме вопросов об объекте моделирования, которые интересуют заказчика.

2. Формулировка. Разработка концептуальной постановки задачи и построение математической модели на основании концептуальной постановки задачи. Это наиболее сложный и ответственный этап.

Концептуальная постановка задачи – это формулировка содержательной постановки задачи в терминах конкретной науки, законов, утверждений и принципов в этой науке, предположений относительно свойств и поведения объекта моделирования.

3. Исследование. Решение и/или анализ математической задачи, к которой приводит математическая модель. На данном этапе математическая задача рассматривается как самостоятельный объект изучения, абстрагируясь от объекта моделирования. Это наиболее «математический» этап.

4. Валидация. Проверка, является ли построенная математическая модель *адекватным* описанием изучаемого объекта моделирования.

5. Интерпретация. Построение выводов по результатам исследования математической модели в терминах соответствующей практической области.

Этапы тесно связаны между собой. Процесс моделирования нужно реализовывать итерационно.

Этап 2. Формулировка

В рамках дисциплины будут рассмотрены различные подходы для построения математических моделей:

- фундаментальные законы природы
- вариационные принципы
- принцип аналогии с другими объектами-оригиналами

Важно отметить, что при одинаковой концептуальной постановке задачи различные подходы должны приводить к одинаковым математическим моделям.

Фундаментальные законы природы

Универсальные физические законы:

- законы Ньютона
- законы сохранения
 - закон сохранения энергии
 - закон сохранения массы приводит к уравнению переноса, уравнению диффузии
 - и др.

Феноменологические законы: закон Гука, формула Стокса и др.

Феноменологические законы – это достаточно хорошо эмпирически (и отчасти теоретически) обоснованные законы с ограниченной областью действия, также установленной эмпирически.

Вариационные принципы

Построение математических моделей возможно на основе вариационных принципов: *виртуального перемещения, наименьшего действия, наименьшего принуждения.*

Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона: из всех допустимых траекторий движения механической системы между моментами времени t_1 и t_2 выбирается движение, доставляющее минимум функционалу действия

$$S[u] := \int_{t_1}^{t_2} L(u(t), u'(t)) dt,$$

где $L(u, u')$ – функция Лагранжа для механической системы. В простейшем случае $L(u, u') = E_k - E_{\text{п}}$ определяется разностью кинетической и потенциальной энергий.

Принцип наименьшего действия принимает вид

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} S(u(t) + \varepsilon \varphi(t)) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

где $\varphi(t)$ – пробная функция такая, что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$.

Принцип аналогии

В большом числе случаев при построении математической модели невозможно указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым подчиняется объект моделирования (например, в экологии, биологии, экономике).

Построение математических моделей может основываться на *предположении*, что *скорость изменения величины пропорциональна значению самой величины (или некоторой функции от нее)*. На основании данного предположения построены модели численности популяции, модели радиоактивного распада, модель распространения нового продукта/услуги на рынке и др.

Предположение в эпидемиологии и экологии: вероятность взаимодействия двух видов пропорциональна произведению их численностей.

Этап 3. Исследование

Выделяют два подхода к решению модели: аналитический подход и алгоритмический подход.

Аналитический подход к решению ММ позволяет получить выходные параметры в виде аналитических выражений (выражения, в которых используется счетная совокупность арифметических операций, переходов к пределу, элементарные и специальные функции) в виде формулы, либо суммы бесконечного ряда, либо интеграла, либо др.

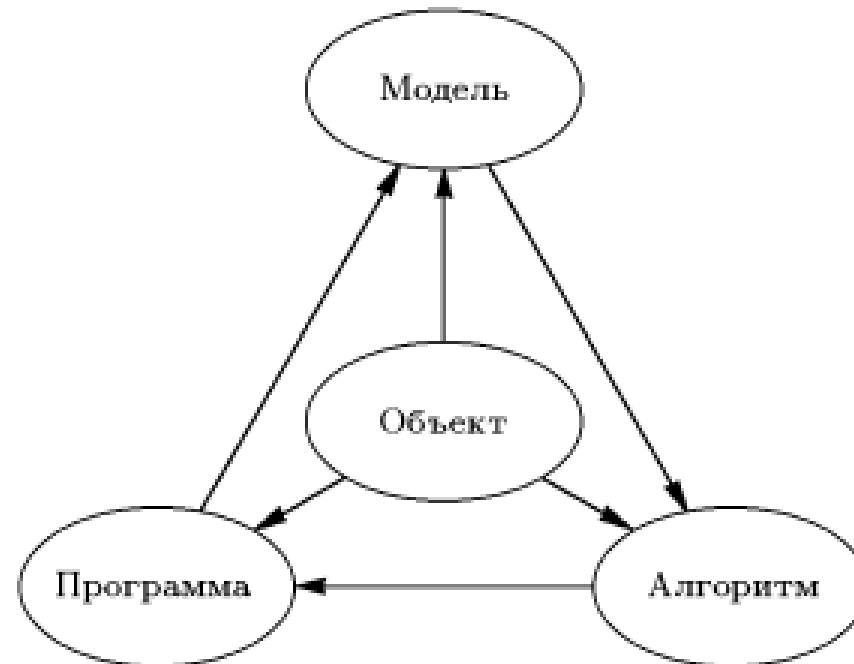
- Для исследования построенных решений можно использовать математические методы анализа аналитических функций
- Усиление интереса к аналитическому подходу связан с появлением систем компьютерной математики, которые предоставляют возможности символьных вычислений для построения аналитических выражений

Алгоритмический подход к решению ММ позволяет получить лишь *приближенные* значения выходных параметров с помощью вычислительных алгоритмов, построенных на основе математической модели

- Необходимы численные методы для построения вычислительных алгоритмов
- Вычислительные алгоритмы необходимо проверять на соответствие модели (верификация алгоритма)
- Для исследования математической модели необходимо осуществлять экспериментирование с вычислительным алгоритмом на компьютере

Алгоритмический подход к решению модели

Триада «модель-алгоритм-программа»



Самарский, 1997

Этап 4. Валидация I

Адекватность математической модели – это степень соответствия результатов моделирования объекту моделирования относительно выбранных свойств. Степень соответствия характеризуется правильным *качественным описанием* рассматриваемых свойств объекта моделирования и правильным *количественным описанием* этих свойств с некоторой приемлемой точностью.

Адекватность является важнейшим требованием к математической модели.

Если адекватность модели характеризуется только качественным описанием, то модель называется **качественной моделью** (например, в биологии, социологии). Если адекватность модели характеризуется количественным описанием, то модель называется **количественной моделью**.

Всякая адекватность устанавливается лишь относительно выбранных свойств и, как следствие, имеет свои рамки применимости. Нужно не забывать о принципиальной ограниченности области возможного применения любой математической модели.

Этап 4. Валидация II

Возможные источники неадекватности математической модели:

Этап 2. Формулировка

- Выбор законов и/или принципов и/или предположений является ошибочным
- Параметры/данные модели определены с недостаточной точностью

Этап 3. Исследование

- Математическая задача является некорректной и требует специальных методов решения и анализа
- Некорректность применения аналитического похода к решению модели
- В случае алгоритмического подхода к решению модели вычислительный алгоритм не верифицирован

Содержание Темы 1

1. Основные понятия
2. Классификация математических моделей
3. Этапы математического моделирования
4. **Динамическая система**

Динамическая система (ДС)

Динамическая система первого порядка описывается *автономным* дифференциальным уравнением (*автономность* означает, что в правую часть f не входит независимая переменная t) первого порядка вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

если все решения $x(t)$ продолжимы для $t \in \mathbb{R}$.

Динамическая система второго порядка описывается *автономной* системой двух дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2).$$

В частности, к динамической системе второго порядка сводится уравнение второго порядка $\frac{d^2x_1}{dt^2} = f_2\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right)$ заменой переменных $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$.

Динамическая система n -го порядка описывается *автономной* системой из n дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Фазовый портрет

Фазовое пространство $Ox_1 \cdots x_n$ используется для геометрического представления множества всех возможных состояний $x \in \mathbb{R}^n$ некоторой динамической системы.

Для ДС 1-го порядка фазовым пространством является одномерная система координат Ox

Для ДС 2-го порядка фазовым пространством является прямоугольная система координат Ox_1x_2

Фазовой траекторией решения динамической системы $x(t)$ называется множество точек $\bigcup_t x(t)$ в фазовом пространстве $Ox_1 \cdots x_n$. Другими словами, фазовая траектория – это проекция решения $x(t)$ на фазовое пространство.

Имеются три основных вида фазовых траекторий: положения равновесия, циклы и непериодические траектории.

Фазовый портрет – это совокупность фазовых траекторий в фазовом пространстве для всевозможных начальных условий с указанием направления движения по траектории с возрастанием времени t . Фазовый портрет отражает *качественную картину* поведения системы.

Важно отметить, что характер фазовых траекторий позволяет выявить всю совокупность качественных особенностей динамической системы без знания решений динамической системы.

Устойчивость положения равновесия

Состояние x^* называется **положением равновесия (состоянием равновесия, точкой покоя, особой точкой)** динамической системы $\frac{dx}{dt} = f(x)$, если оно не изменяется во времени. Все положения равновесия находятся из решения системы $f(x^*) \equiv 0$.

Положение равновесия x^* является **устойчивым**, если по любой заданной области допустимых отклонений от положения равновесия (область ε) в фазовом пространстве $0x_1 \cdots x_n$ можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую положение равновесия и обладающую тем свойством, что ни одно решение $x(t)$, начинающееся внутри $\delta(\varepsilon)$, никогда не достигнет границы области ε .

Примеры устойчивого и неустойчивого положений равновесия $(0,0)$

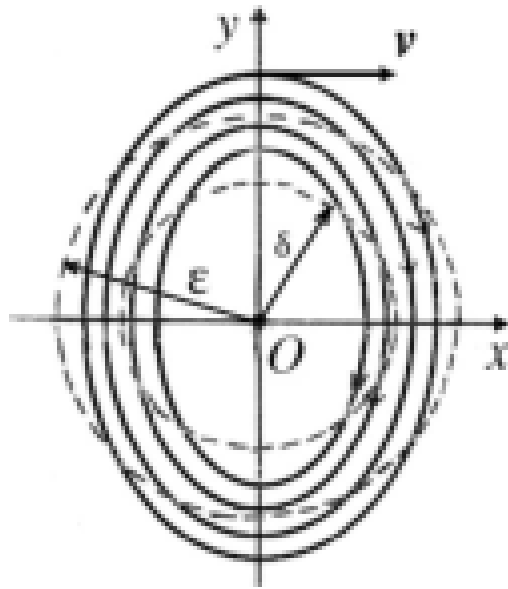


Рис. 31.9. Нулевое решение устойчиво

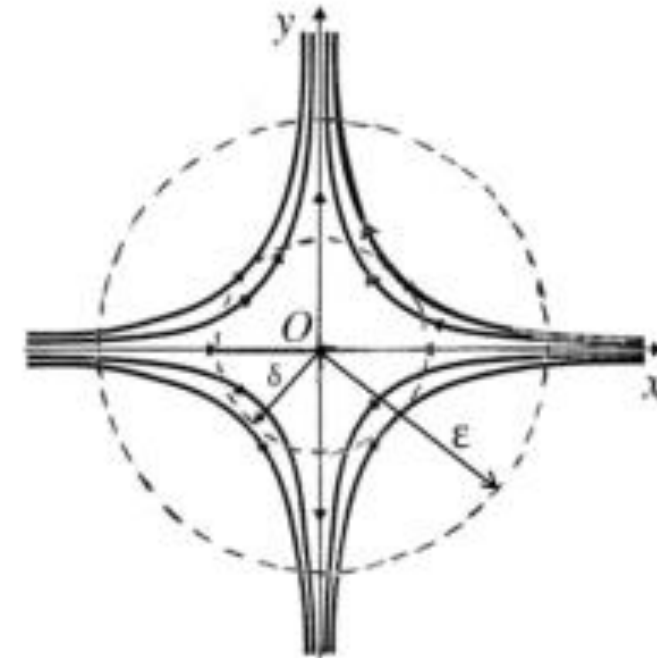


Рис. 31.8. Положение равновесия $(0,0)$ неустойчиво

см. стр. 265—266 в [Прохорова, ОДУ, 2017]

Устойчивость решения по начальным данным

Рассмотрим задачу Коши
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

полагая существование и единственность решения при $t \geq t_0$.

Решение задачи Коши $\bar{x}(t)$ называется **устойчивым (устойчивым по Ляпунову)**, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ задачи Коши, удовлетворяющего условию $\|x(t_0) - \bar{x}(t_0)\| < \delta$ следует, что для всех $t \geq t_0$ справедливо $\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$.

Если при этом

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \bar{x}(t)\| = 0,$$

то решение задачи Коши называется **асимптотически устойчивым**.

В противном случае решение $\bar{x}(t)$ называется **неустойчивым**.

см. стр. 258—259 в [Прохорова, ОДУ, 2017]

Примеры устойчивого и неустойчивого решений

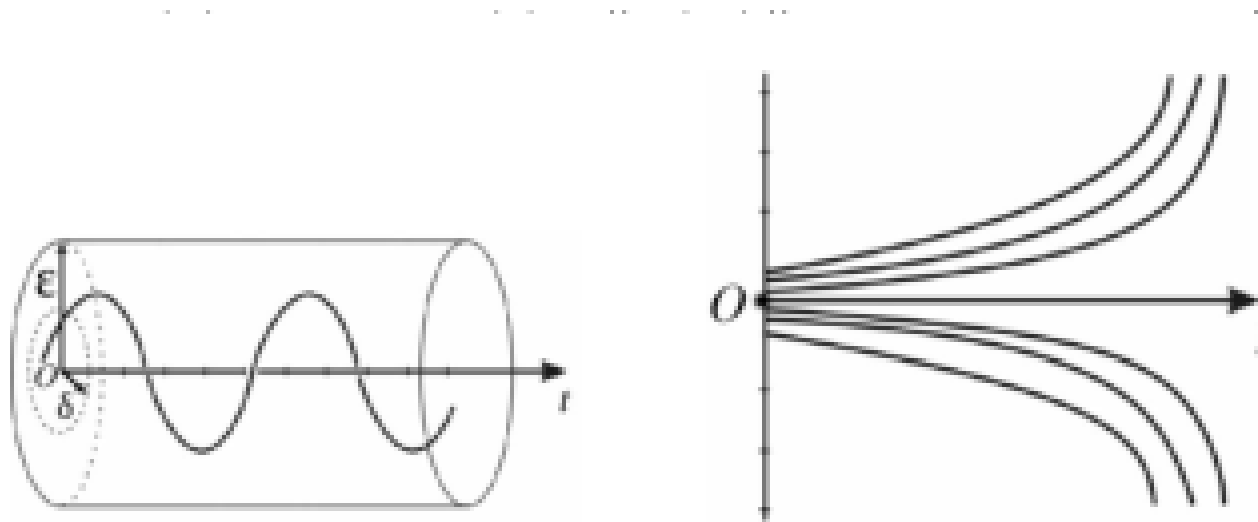


Рис. 31.1. Устойчивое и неустойчивое нулевые решения (положения равновесия)

см. стр. 260 в [Прохорова, ОДУ, 2017]

Устойчивость положения равновесия для линейной ДС

Рассмотрим линейную однородную ДС n -го порядка вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Постоянная вещественная матрица A имеет собственные значения $\lambda_i, i = \overline{1, n}$.

Теорема Ляпунова. Нулевое решение линейной однородной ДС

- 1) **устойчиво** тогда и только тогда, когда среди собственных значений матрицы A нет таких, вещественные части которых положительны $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0, i = \overline{1, n}$, а собственные числа с нулевой вещественной частью либо простые, либо имеют простые элементарные делители;
- 2) **асимптотически устойчиво** тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = \overline{1, n}$;
- 3) **неустойчиво**, если существует собственное значение матрицы A с положительной вещественной частью $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, либо существует собственное значение с $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, которому отвечает жорданова клетка порядка ≥ 2 .

см. стр. 260—261 в [Прохорова, ОДУ, 2017]

Положение равновесия линейной ДС 2-го порядка

Рассмотрим линейную однородную ДС 2-го порядка вида $\frac{dx}{dt} = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
Матрица A имеет два собственных значения λ_1 и λ_2 .

Решение $x = 0$ называется

узел (λ_1 и λ_2 вещественные одного знака) устойчивый при $\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0$, узел неустойчивый при $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$

седло (λ_1 и λ_2 вещественные разных знаков) при $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$; седло *всегда неустойчивое*

фокус (λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные): $\lambda_{1,2} = \mu \pm iv$, $\mu \neq 0$, $v \neq 0$; фокус устойчивый при $\mu < 0$, фокус неустойчивый при $\mu > 0$

центр (λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные): $\lambda_{1,2} = 0 \pm iv$, $v \neq 0$; центр *всегда устойчивый*, но не асимптотически устойчивый

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$: $\lambda_2 < 0$ -- устойчивое решение, $\lambda_2 > 0$ -- неустойчивое решение

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: ...

см. стр. 272—280 в [Прохорова, ОДУ, 2017]

Устойчивость по линейному приближению (первый метод Ляпунова)

Рассмотрим **нелинейную ДС n -го порядка** вида $\frac{dx}{dt} = f(x)$

Пусть $f(x) = Ax + F(x)$ -- линеаризация системы в окрестности *положения равновесия* $x = 0$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x),$$
$$|F(x)| \leq M|x|^{1+\alpha}, M > 0, \alpha > 0.$$

Если собственные значения матрицы A различны и имеют вещественные части, отличные от нуля, то положение равновесия $x = 0$ нелинейной системы имеет тот же характер, что и положение равновесия линеаризованной системы $\frac{dx}{dt} = Ax$.

см. стр. 281—287 в [Прохорова, ОДУ, 2017]

Сведение к нулевому решению

Исследование устойчивости решения $\bar{x}(t)$ при $t \geq t_0$ задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения $y = 0$ задачи Коши, полученной из исходной задачи при помощи замены переменных $y = x - \bar{x}(t)$.

см. стр. 259—260 в [Прохорова, ОДУ, 2017]

Линеаризованная системы в окрестности $y = 0$ после замены будет иметь вид $\frac{dy}{dt} = Ay$, где $A = \frac{df}{dx}(\bar{x})$.

Важность исследования устойчивости

Устойчивость решений имеет принципиальное значение для решения практических задач. Дело в том, что если сколь угодно малые изменения начальных данных сильно изменяют решение, определяемое выбранными неточными данными, которые обычно являются результатом измерений и, следовательно, неизбежно получены с некоторой погрешностью, то такое решение не имеет никакого прикладного значения и даже приближенно не может описывать изучаемое явление или процесс. *Амелькин, 2012*

... по этой причине надежный долгосрочный динамический прогноз погоды невозможен и останется невозможным, сколь бы ни совершенствовались компьютеры и регистрирующие начальные условия датчики. *Арнольд*