

Лабораторная работа №8

Математические модели процессов диффузии частиц вещества

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
май 2023
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. Одномерное уравнение диффузии в неподвижной среде

Концептуальная постановка задачи

[2, стр. 219, задача 9] Цилиндр длины l , заполненный воздухом при давлении и температуре окружающей среды, открывают с одного конца в начальный момент времени, и из окружающей атмосферы, где концентрация некоторого газа равна $\phi_0 = \text{const}$, начинается диффузия газа в цилиндр. Начальная концентрация газа в цилиндре равна 0. Площадь поперечного сечения цилиндра намного меньше длина цилиндра.

Задание 1.1 (Математическая модель)

Сформулируйте математическую модель в виде первой краевой задачи (начальное условие, граничное условие Дирихле на обоих концах цилиндра) для одномерного уравнения диффузии в неподвижной среде по концептуальной постановке задачи.

Задание 1.2 (Аналитическое решение)

Постройте аналитическое решение математической модели с помощью **метода разделения переменных**, а также с помощью функции **DSolve**.

Сравните графики построенных решений.

Задание 1.3 (Анализ количества диффундировавшего газа)

Вычислите количество газа, диффундировавшего в цилиндр за время t . Для этого вычислите интеграл от концентрации $\phi(x, t)$ по длине цилиндра.

Постройте график зависимости количества диффундировавшего газа от времени t .

Дополнительные теоретические сведения

Отметим, что аналогичная математическая модель строится для описания одномерного процесса передачи тепла на основании следующей концептуальной постановки задачи.

Концептуальная постановка задачи для процесса теплопроводности

На одном конце стержня длины l поддерживается постоянная температура

$u(x, 0) = u_0 = \text{const}$, второй конец стержня теплоизолирован. Начальная температура стержня равна 0. Площадь поперечного сечения стержня намного меньше длина стержня, теплообмен на боковой поверхности отсутствует. Найдите распределение температуры $u(x, t)$ стержня при $0 < t < +\infty$.

Задание 2. Математические модели пространственной популяционной динамики при случайном перемещении особей

Рассмотрим математическую модель популяционной динамики в предположении о случайном перемещении особей в ограниченной области проживания $X = [0, l]$.

Математическую модель можно описать с помощью уравнения реакции-диффузии

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + k u(1 - u), \quad (1)$$

где $u(x, t) \geq 0$ -- плотность особей популяции,

$x \in X = [0, l]$,

$D = \text{const} > 0$ -- характеризует скорость передвижения особей,

$k = \text{const} > 0$. Последнее слагаемое в правой части уравнения (1) регулирует изменение численности популяции и соответствует логистической модели.

Уравнение (1) называется уравнением Фишера - Колмогорова (1937) и является фундаментальным уравнением в биологии.

Дополнительно к уравнению (1) формулируется начальное условие $u(x, 0) = u_0(x)$ и однородное условие Дирихле на границе области, имитирующее проживание популяции на острове, $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Задание 2.1 (Устойчивость положений равновесия)

Исследуйте устойчивость положений равновесия рассматриваемой модели с помощью фазового портрета стационарных решений.

Задание 2.2 (Качественное поведение численного решения)

Постройте графики решений математической модели (1), построенных с помощью **NDSolve**, при $k = 1$ с некоторым начальным условием $u_0(x)$, близким к нулю, при различных размерах области X и различных значениях скорости передвижения особей D .

Продемонстрируйте, что при недостаточном размере области $l < l^* = \pi \sqrt{\frac{D}{k}}$ популяция будет вымирать.

Задание 2.3 (Качественный анализ модели Скллама)

Для модели Скллама вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + k u, \quad (2)$$

с однородными условиями Дирихле на границе области также справедливо утверждение, что при недостаточном размере области $l < l^* = \pi \sqrt{\frac{D}{k}}$ популяция будет вымирать.

Проверьте это утверждение.

Задание 2.4 (Качественный анализ двумерной модели Скллама)

Для двумерной модели Скллама вида

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + k u, \quad (3)$$

в квадратной области $X = [0, l] \times [0, l]$ с однородными условиями Дирихле на границе области необходимо **продемонстрировать** существование критического размера области l^* , такого, что при $l < l^*$ популяция будет вымирать, на основе интерактивной визуализации решения модели (3) при $k = 1$.

Задание 3 (необязательное). Математическая модель преобразования сигнала в аксоне

[5, стр. 117, упр. 4.5.5] Рассмотрим математическую модель преобразования сигнала в аксоне в виде уравнения реакции-диффузии

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \left(u - \frac{1}{2} \right) (1 - u) u$$

для потенциала мембраны $u(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, где l -- заданная длина аксона, с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$ и с однородными условиями Неймана на границах аксона

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0.$$

Задание 3.1 (Устойчивость положений равновесия)

Исследуйте устойчивость положений равновесия рассматриваемой модели с помощью фазового портрета стационарных решений.

Попробуйте сформулировать биологический смысл построенных стационарных решений.

Задание 4. Одномерное стационарное уравнение диффузии с точечным источником

Задание 4.1 (Математическая модель)

Сформулируйте математическую модель для описания процесса выброса химического вещества (аэрозоля) промышленным предприятием на основании стационарного одномерного процесса диффузии вещества при условиях, что

- коэффициент диффузии постоянный, $D(x) = \text{const} > 0$;
- скорость потока воздушных масс атмосферы постоянная, $u(x) = \text{const}$;
- процесс поглощения атмосферой химического вещества задается коэффициентом $\sigma = \text{const} > 0$;
- точечный источник вещества мощности $Q = \text{const} > 0$, выбрасывающий в атмосферу аэрозоль, расположен в точке $x = x_0$.

Задание 4.2 (Аналитическое решение)

Постройте аналитическое решение математической модели.

Задание 4.3 (Динамическая визуализация)

Осуществите динамическую визуализацию решения модели с интерактивным изменением параметров модели D , u , σ , Q , x_0 .

Литература

- [1] В. И. Корзюк. Уравнения математической физики: учеб. пособие. -- Минск.: БГУ, 2011.
- [2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. -- М.: Наука, 1977.
- [3] Г. И. Марчук. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. -- М.: Наука, 1982.
- [4] Л. А. Петросян, В. В. Захаров. Введение в математическую экологию. -- Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.
- [5] G. Vries, T. Hillen, M. Lewis, J. Mueller, B. Schoenfish. A course in mathematical biology: quantitative modeling with mathematical and computational methods. SIAM, 2006.