Лабораторная работа №4

Математические модели распространения инфекционных заболеваний

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
март 2023
ММФ, КМиСА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. SIR-модель

Математическая модель

Математическая модель представляет собой задачу Коши для системы из трех согласованных ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -r S I, \\
\frac{dI}{dt} &= r S I - \alpha I, \\
\frac{dR}{dt} &= \phantom{-r S I -{}} \alpha I, \\
I(0) &= I_0, \\
S(0) &= N - I_0, \\
R(0) &= 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$S(t) + I(t) + R(t) \equiv N = \text{const} > 0$;

$r = \text{const} > 0$ -- коэффициент инфицирования (infection rate);

$\alpha = \text{const} > 0$ -- коэффициент выздоровления (recovery rate).

Задание 1.1 (Пороговый эффект)

Изобразите графики функций $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ решения SIR-модели (1) для популяции с численностью $N = 10^5$ с интерактивным управлением значениями параметров модели $0 < r << 1$, $0 < \alpha < 1$, $I_0 << N$ и с отображением значения базового репродуктивного числа $R_0 = \frac{r}{\alpha}(N - I_0)$, соответствующего выбранным значениям параметров.

Дополнительно в интерактивном объекте **изобразите** фазовую траекторию, соответствующую решению SIR-модели для выбранных параметров, в фазовой SI–плоскости (например, с помощью функции **StreamPlot** и опций **RegionFunction** для выделения треугольной области $0 \le S + I \le N$, **StreamPoints** для задания конкретной траектории).
Дополнительно в интерактивном объекте **изобразите** фазовую траекторию, соответствующую решению SIR-модели для выбранных параметров, в фазовом SIR-пространстве (например, с помощью функции **ParametricPlot3D**).

Продемонстрируйте на построенных графиках пороговый эффект: **эпидемия возникает тогда, когда базовое репродуктивное число $R_0 \ge 1$, и не возникает, когда $R_0 < 1$.**

Задание 1.2 (Учет вакцинации)

Продемонстрируйте на графиках эффективность вакцинации, т.е. что эпидемия не возникает в том случае, если будет вакцинирована доля p от всей численности популяции, где $p > p^* = 1 - \frac{1}{R_0}$. Для учета вакцинации в математической модели (1) полагаем, что $S(0) = (1 - p) N - I_0$, $R(0) = p N$. Для моделирования полагаем также, что $I_0 = 0.01 N$.

Задание 1.3 (Коллективный иммунитет)

На основании SIR-модели **вычислите** минимальное значение доли p^* от численности популяции для вакцинации, которая позволила бы избежать эпидемии (создать коллективный иммунитет) в следующих случаях:

- эпидемия гриппа H3N2 в Гонконге в 1968-1969 гг.: число контактов в день -- 6, продолжительность болезни -- 3 дня;
- эпидемия кори в Калифорнии в 2014-2015 гг.: число контактов в день -- 18, продолжительность болезни -- 8 дней.

Напомним, что коэффициент инфицирования r равен отношению числа контактов в единицу времени к размеру популяции и к периоду продолжительности болезни ; размерность 1/день. Коэффициент выздоровления α равен обратной величине к периоду продолжительности болезни, размерность 1/день.

Вычислите также максимальное число для количества инфицированных особей $I(t)$ без проведения вакцинации в популяции.

Задание 2. SEIR-модель

Математическая модель

Математическая модель представляет собой задачу Коши для системы из четырех согласованных ОДУ первого порядка

$$
\begin{aligned}
&\frac{dS}{dt} = -r S I,\\
&\frac{dE}{dt} = r S I - b E,\\
&\frac{dI}{dt} = -\alpha I + b E,\\
&\frac{dR}{dt} = \alpha I,\\
&I(0) = I_0,\\
&S(0) = N - I_0,\\
&E(0) = 0,\\
&R(0) = 0,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где

$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) \equiv N = \text{const} > 0$;

$r = \text{const} > 0$ -- коэффициент инфицирования (infection rate);

$\alpha = \text{const} > 0$ -- коэффициент выздоровления (recovery rate);

$b = \text{const} > 0$.

Задание 2.1 (Пороговый эффект)

Изобразите графики функций $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, $R(t)$ решения SEIR-модели (2) для популяции с численностью $N = 10^5$ с интерактивным управлением значениями параметров модели
$0 < r << 1$, $0 < \alpha < 1$, $0 < b < 1$, $I_0 << N$.
Дополнительно в интерактивном объекте **изобразите** фазовую траекторию, соответствующую решению SEIR-модели для выбранных параметров, в фазовой SI–плоскости.

Задание 2.2 (Качественный анализ динамической системы)

Проанализируйте устойчивость положения равновесия динамической системы (S^*, 0, 0, $N - S^*$), где $0 \leq S^* \leq N$ по собственным значениям линеаризованной динамической системы. Устойчивость положения равновесия, т.е. действительные части собственных значений линеаризованной динамической системы меньше нуля, будет соответствовать отсутствию эпидемии. На основании анализа устойчивости положения равновесия найдите базовое репродуктивное число SEIR-модели (2).

Продемонстрируйте пороговый эффект на графиках, построенных в Задании 2.1: **эпидемия возникает тогда, когда базовое репродуктивное число $R_0 \geq 1$, и не возникает, когда $R_0 < 1$.**

Задание 2.3 (Оценка влияния инкубационного периода заболевания)

Сделайте выводы о качественном изменении динамики распространения заболевания при наличии инкубационного периода заболевания на основании сравнения результатов для SIR-модели (1) и SEIR-модели (2): длительность заболевания, максимальное значение инфицированных, значение базового репродуктивного числа, устойчивость положений равновесия, поведение при $t \to \infty$.

Задание 3. SIR-модель с дополнительным учетом рождаемости и смертности

Математическая модель

Математическая модель представляет собой задачу Коши для системы из трех согласованных ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -r S I + a N - b S,\\
\frac{dI}{dt} &= r S I - \alpha I - b I,\\
\frac{dR}{dt} &= \alpha I - b R,\\
I(0) &= I_0,\\
S(0) &= N_0 - I_0,\\
R(0) &= 0,
\end{aligned} \qquad (3)$$

где
$S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$;
$r = \text{const} > 0$ -- коэффициент инфицирования (infection rate);
$\alpha = \text{const} > 0$ -- коэффициент выздоровления (recovery rate);
$a = \text{const} > 0$ -- коэффициент рождаемости;
$b = \text{const} > 0$ -- коэффициент смертности.

Задание 3.1 (Пороговый эффект)

Изобразите графики функций $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ решения математической модели (3), а также график функции $N(t)$ для популяции с начальной численностью $N_0 = 10^5$ с интерактивным управлением значениями параметров модели $0 < r << 1$, $0 < \alpha < 1$, $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $I_0 << N_0$ и с отображением значения базового репродуктивного числа $R_0 = \frac{r}{\alpha+b}(N_0 - I_0)$, соответствующего выбранным значениям параметров.

Изобразите фазовую траекторию, соответствующую решению модели для выбранных параметров, в фазовом S/I-пространстве.

Продемонстрируйте на графиках пороговый эффект: **эпидемия возникает тогда, когда базовое репродуктивное число $R_0 \geq 1$, и не возникает, когда $R_0 < 1$.**

Задание 3.2 (Качественный анализ динамики распространения заболевания)

Сравните по графикам качественное поведение решений для случаев $a < b$, $a = b$, $a > b$ и **сделайте выводы**.

Литература

[1] Д. Мюррей. Математическая биология. Том I. Введение. -- М.-Ижевск, 2009.

[2] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. -- 2011.

[3] B. Barnes, G. R. Fulford. Mathematical Modelling with Case Studies: A differential equation approach using Maple and MATLAB. Second Edition, CRC Press, 2008.

[4] Дополнительные материалы для выполнения Лб4 на Python: https://nbviewer.org/github/jckantor/CBE30338/blob/master/notebooks/03.09-COVID-19.ipynb?fbclid=IwAR2t1Cqo1RI44wEvpB5qkPaADjNcl_119ZcE_X7Yev5xq3q_CDex3bxQkRY