Лабораторная работа №2

Линейные математические модели колебательных явлений

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
февраль 2023
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Пружинный осциллятор

Концептуальная постановка задачи

- Объектом исследования является физическое тело массы m, которое находится на одном конце пружины, второй конец пружины жестко закреплен. Тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной пружины, поэтому принимаем его за материальную точку.
- Тело движется вперед или назад по горизонтальной поверхности. Обозначим через $r(t)$ координату тела вдоль оси пружины относительно положения равновесия $r = 0$, когда пружина не сжата и не растянута. Будем считать, что $r(t) > 0$, когда пружина растянута и $r(t) < 0$, когда она сжата.
- Расстояние между положением равновесия $r = 0$ и стенкой, к которой крепится пружина, равно L.
- Тело находится под действием **силы упругости** пружины. Сила упругости описывается *законом Гука* $F = -k\,r$, где коэффициент упругости $k = \text{const} > 0$. Закон Гука является экспериментальным и справедлив при небольших отклонениях пружины от ее положения равновесия.
- Можно сделать допущение, что тело движется без трения. Предположение об отсутствии трения справедливо для небольших промежутков времени. Если учитывать сопротивление среды, то можно полагать, что **сила трения** пропорциональна скорости движения $F_{\text{тр}} = -\mu \frac{dr(t)}{dt}$ с коэффициентом трения $\mu = \text{const} > 0$. Приведенная зависимость называется *формулой Стокса* и является допустимой при малых скоростях движения.
- На тело может действовать **внешняя сила**, например $F = F_0 \sin(t\,\omega_2)$.

Принимая во внимание, что в момент времени $t = 0$ пружину растянули на величину r_0 и сообщили телу скорость v_0, требуется определить координату тела $r(t)$ как функцию времени.

Задание 1. Гармонические колебания

Математическая модель пружинного осциллятора без учета сопротивления среды представляет собой задачу Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами следующего вида

$$\frac{d^2 r(t)}{d t^2} + \omega^2 r(t) = 0,$$
$$r(0) = r_0, \qquad (1)$$
$$\frac{d r(0)}{d t} = v_0,$$

где $\omega = \sqrt{k/m} = \text{const} > 0$ -- собственная частота колебаний.

Задание 1.1 (Амплитуда колебаний)

Сформулируйте условия на величины начальных данных r_0 и v_0, при выполнении которых груз не может удариться о стенку. Для этого необходимо найти аналитическое решение математической модели (1) в виде $r(t) = A\cos(t\,\omega + \phi_0)$ и сформулировать условие $A \leq L$. Здесь L -- это расстояние между положением равновесия $r \equiv 0$ и стенкой, к которой крепится пружина.

Найденное условие задает ограничения на применимость математической модели (1), так как при соударении со стеной тело испытывает дополнительную силу, которая должна быть учтена в математической модели.

Задание составлено на основе материала из [1, стр. 34, упр. 4].

Задание 1.2 (Динамическая визуализация с учетом соударения тела о стенку)

Осуществите динамическую визуализацию поведения пружинного осциллятора с возможностью интерактивного задания параметров модели ω, r_0, v_0, L.

В случае соударения со стенкой, к которой крепится пружина, остановите анимацию, например, с использованием выражения **WhenEvent** функции **NDSolve** или опции **Method** (значение **EventLocator**) функции **NDSolve** .

Справочную информацию можно найти по ссылкам
https://reference.wolfram.com/language/ref/WhenEvent.html
`http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveEventLocator.html`.

Задание 2. Колебания с учетом сопротивления среды

Полагаем, что на пружинный осциллятор воздействует сила трения, заданная формулой Стокса $F_{\text{тр}} = -\mu \frac{dr(t)}{dt}$, где коэффициент трения $\mu = \text{const} > 0$.

Математическая модель пружинного осциллятора с учетом сопротивления среды представляет собой задачу Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами следующего вида

$$m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = -k\, r(t) - \mu \frac{dr(t)}{dt},$$
$$r(0) = r_0, \tag{2}$$
$$\frac{dr(0)}{dt} = v_0.$$

Задание 2.1 (Качественный анализ по фазовому портрету)

Изобразите фазовые траектории для модели (2) для трех возможных типов поведения системы: затухающее колебание, критическое колебание, апериодическое затухание.

Для каждого типа поведения **проанализируйте** характер положения равновесия $r(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 0$ (узел, седло, фокус, центр или др.) и его устойчивость по фазовому портрету.

Задание 2.2 (Качественный анализ по теореме Ляпунова)

Найдите собственные значения матрицы динамической системы, соответствующей математической модели (2).

По собственным значениям **проанализируйте** характер положения равновесия $r(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 0$ (узел, седло, фокус, центр или др.) и его устойчивость для различных типов поведения системы: затухающее колебание, критическое колебание, апериодическое затухание.

Задание 2.3 (Анализ частных случаев)

Проанализируйте, какому типу поведения соответствует движение пружинного осциллятора ($m = 0.1$ кг, $k = 10$ Н/м) в воздухе ($\mu = 1.82 * 10^{-5}$ Нс/м^2), в воде ($\mu = 1.002 * 10^{-3}$ Нс/м^2), в глицерине ($\mu = 1.49$ Нс/м^2)?

Задание 3. Вынужденные колебания

Полагаем, что тело, закрепленное на пружине, движется без трения. Предположим, что на тело действует внешняя периодическая сила $F(t) = F_0 \sin(t\,\omega_2)$ с частотой $\omega_2 = \text{const} > 0$.

Математическая модель пружинного осциллятора без учета сопротивления среды под действием внешней силы представляет собой задачу Коши для линейного НЕоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами следующего вида

$$
\begin{aligned}
& m\frac{d^2 r(t)}{d t^2} = -k\, r(t) + F_0 \sin(t\,\omega_2)\,, \\
& r(0) = r_0, \\
& \frac{d\, r(0)}{d\, t} = v_0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Задание 3.1 (Частное решение математической модели)

Постройте частное решение $r^*(t)$ математической модели (3) <u>при наличии резонанса</u> в виде $r^*(t) = t\,(C_1 \sin(\omega\, t) + C_2 \cos(\omega\, t))$, где $\omega = \sqrt{k/m}$ собственная частота колебаний. Построение осуществите на основе метода неопределенных коэффициентов для коэффициентов C_1 и C_2 с использованием возможностей символьных вычислений.

Постройте частное решение $r^*(t)$ математической модели (3) б<u>ез резонанса</u> в виде $r^*(t) = C \sin(\omega_2\, t)$, где $\omega_2 \neq \omega$. Построение осуществите на основе метода неопределенных коэффициентов для коэффициента C с использованием возможностей символьных вычислений.

Задание 3.2 (Графики вынужденных колебаний)

Изобразите графики резонансного и нерезонансного решений математической модели (3), построенных с использованием частных решений из Задания 3.1, для произвольно заданных значений параметров модели ω, ω_2, F_0, r_0, v_0.

Задание 4. Система химической реакции двух веществ

Содержательная постановка задачи

Вещество X поступает в систему с постоянной скоростью $k_1 = \text{const} > 0$, превращается в вещество Y со скоростью, пропорциональной концентрации вещества X, и коэффициентом пропорциональности $k_2 = \text{const} > 0$. Вещество Y выводится из системы со скоростью, пропорциональной концентрации вещества Y, и коэффициентом пропорциональности $k_3 = \text{const} > 0$. Принимая во внимание, что в момент времени $t = 0$ концентрация вещества X равна X_0, а концентрация вещества Y равна Y_0, требуется определить концентрации веществ как функции времени $X(t)$, $Y(t)$ при $t \geq 0$.

Задание 4.1 (Математическая модель)

По содержательной постановке задачи **сформулируйте** концептуальную поставку задачи и **постройте** математическую модель для концентрации веществ $X(t)$ и $Y(t)$.

Задание 4.2 (Качественный анализ устойчивости)

Исследуйте положение равновесия соответствующей динамической системы второго порядка на устойчивость. Исследование устойчивости осуществите по фазовому портрету, а также по анализу собственных значений матрицы динамической системы.

Задание 5* (необязательное). Математическая модель любовных отношений

В простейшем случае модель отношений между мужчиной и женщиной может быть описана с помощью линейной однородной динамической системы второго порядка, см. [8, стр. 138],

$$\frac{dR(t)}{dt} = aR + bJ,$$
$$\frac{dJ(t)}{dt} = cR + dJ, \tag{4}$$

где $R(t)$ -- состояние влюбленности мужчины (Romeo), $J(t)$ -- состояние влюбленности женщины (Juliet).

Значения параметров $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $c = \text{const}$, $d = \text{const}$ позволяют определять различные модели поведения в отношениях между мужчиной и женщиной. Например, в случае, когда
$a = 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d = 0$, см. пример [8, стр. 138], мужчина стремится следовать состоянию женщины ($a = 0$, $b > 0$), тогда как женщина постоянно изменяет свое состояние на противоположное мужскому ($c < 0$, $d = 0$). Также на примере из книги [8, стр. 138] по фазовому портрету анализируется ситуация, когда мужчина и женщина демонстрируют одинаковую модель поведения в отношениях:
$a < 0$, $b > 0$, $c = b$, $d = a$.

Выполните примеры из книги [8, стр. 138--139]. **Выполните** упражнения 5.3.1--5.3.6 из [8, стр. 144]. В частности, в упражнениях предложено проанализировать по фазовому портрету, к чему приводять следующие ситуации:
-- мужчина и женщина демонстрируют противоположные модели поведения: $c = -b$, $d = -a$ (упр. 5.3.4);
-- мужчина никак не проявляет свои чувства: $a = 0$, $b = 0$ (упр. 5.3.6).

Литература

[1] А. А. Самарский, А. П. Михайлов. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. -- М.: Физматлит, 2001.

[2] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. -- М.: Физматлит, 1959.

[3] Ч. Г. Эдвардс, Д. Э. Пенни.Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и Matlab. -- М.: ООО “И.Д. Вильямс”, 2008.

[4] S. Heinz. Mathematical Modeling. -- Springer, 2011.

[5] Р. А. Прохорова. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие. -- Мн. : БГУ, 2017. http://elib.bsu.by/handle/123456789/205697

[6] В. В. Амелькин. Дифференциальные уравнения : учебное пособие. -- Мн. : БГУ, 2012. http://elib.bsu.by/handle/123456789/43871

[7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том 1. Механика. -- М.: Наука, 1988.

[8] S.H. Strogatz. Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering .-- Perseus Books Publishing, 1994.