

# Лабораторная работа №1

## Математические модели динамики численности популяции одного вида

Мат. моделирование динамических процессов 1  
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр  
специальность Компьютерная математика и системный анализ  
февраль 2023  
доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

### Задание 1. Модель Мальтуса

Модель Мальтуса, или модель экспоненциального роста является одной из простейших моделей численности популяции одного вида. Модель была предложена Мальтусом в 1798 году для описания роста численности населения Земли.

#### Содержательная постановка задачи

Рассмотрим популяцию больших размеров, численность которой измеряется миллионами и более. Полагаем, что не существует факторов, сдерживающих рост популяции, таких как болезни, хищники, конкурирующие виды, ограниченность питания и др. Пренебрегаем процессами иммиграции и эмиграции. Необходимо определить изменение численности популяции во времени.

#### Концептуальная постановка задачи

Численность популяции рассматривается как непрерывная функция времени  $N = N(t)$ . В силу того, что популяция достаточно велика, игнорируем случайные различия между отдельными особями. Полагаем, что каждая особь в популяции имеет равные шансы родить и умереть в течение определенного промежутка времени. Полагаем, что рождаемость и смертность непрерывны во времени и заданы коэффициентами рождаемости  $\alpha(t) \geq 0$  и смертности  $\beta(t) \geq 0$  на одну особь в единицу времени.

В основу модели Мальтуса положено утверждение, что скорость изменения численности популяции  $N'(t)$  пропорциональна ее численности  $N(t)$  в момент времени  $t$ , с коэффициентом пропорциональности, равным разности коэффициентов рождаемости и смертности

$$N'(t) = (\alpha(t) - \beta(t)) N(t). \quad (1)$$

#### Замечание

Предположение вида “скорость изменения величины пропорциональна значению самой

величины (или некоторой функции от нее)” широко используется в различных областях знаний.

## Математическая модель

Моделью Мальтуса называется задача Коши для уравнения (1) при заданном начальном условии в момент времени  $t = t_0$

$$\begin{aligned} N'(t) &= (\alpha(t) - \beta(t)) N(t), \\ N(t_0) &= N_0. \end{aligned} \tag{2}$$

### Замечание

Модель Мальтуса является примером применения принципа аналогии при построении математических моделей объектов, для которых невозможно указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым они подчиняются.

## Задание 1.1 (аналитическое решение)

**Постройте** аналитическое решение модели Мальтуса (2), например, методом разделения переменных для заданной численности населения  $N_0$  в начальный момент времени  $t_0$ .

**Сравните** построенное решение и решение, полученное с помощью функции **DSolve** (**DSolveValue**)

```
In[ ]:= ClearAll[t0, N0];

In[ ]:= sol = DSolveValue[{NN'[t] == (α[t] - β[t]) × NN[t], NN[t0] == N0}, NN[t], t]

Out[ ]:= e∫1t (α[K[1]] - β[K[1]]) × dK[1] - ∫1t0 (α[K[1]] - β[K[1]]) × dK[1] N0
```

**Напишите** пользовательскую функцию для задания аналитического решения модели Мальтуса, где  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $N_0 \geq 0$  и  $t_0 \geq 0$  являются аргументами функции.

## Задание 1.2 (график аналитического решения)

**Изобразите** в одной системе координат графики функции  $N(t)$  для фиксированных значений  $t_0$  и  $N_0 > 0$  и различных значений  $\alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$  и  $\beta(t) = \beta_0 = \text{const}$ . Рассмотрите случаи  $\alpha_0 < \beta_0$ ,  $\alpha_0 = \beta_0$ ,  $\alpha_0 > \beta_0$ . Используйте пользовательскую функцию из Задания 1.1 для задания функции  $N(t)$ .

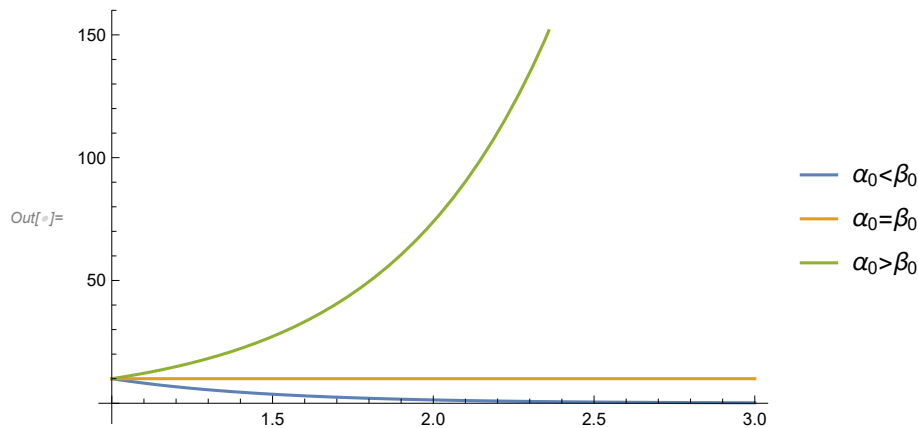
Пример построения графиков решений

```
In[ ]:= t0 = 1; N0 = 10;

In[ ]:= funcs = (Activate@(sol /. #)) & /@
  {{α[_] → 0, β[_] → 2}, {α[_] → 2, β[_] → 2}, {α[_] → 2, β[_] → 0}}

Out[ ]:= {10 e-2 × (-1+t), 10, 10 e2 × (-1+t)}
```

```
In[ ]:= Plot[funcs, {t, t0, 3}, PlotLegends → {" $\alpha_0 < \beta_0$ ", " $\alpha_0 = \beta_0$ ", " $\alpha_0 > \beta_0$ "}]
```



### Задание 1.3 (качественный анализ модели по решению)

На основании построенных графиков в Задании 1.2 **сформулируйте** выводы о качественном поведении решения модели Мальтуса при  $t \rightarrow \infty$  для случаев  $\alpha_0 < \beta_0$ ,  $\alpha_0 = \beta_0$ ,  $\alpha_0 > \beta_0$ : например, монотонное возрастание/убывание, экспоненциальное возрастание/убывание, колебания, экспоненциальный рост, гиперболический рост и т.д.

На основании построенных графиков в Задании 1.2 **проанализируйте**, является ли положение равновесия  $M(t) \equiv N_0 > 0$ , соответствующее решению модели при совпадении коэффициентов рождаемости и смертности  $\alpha_0 = \beta_0$ , устойчивым относительно изменения значений параметров  $\alpha_0, \beta_0$ ?

### Задание 1.4 (качественный анализ модели по фазовому портрету)

Фазовое пространство для рассматриваемой динамической системы первого порядка является одномерным и представляет собой прямую линию  $ON$ , которая ограничена значениями  $N \geq 0$  в силу того, что  $M(t)$  является численностью населения.

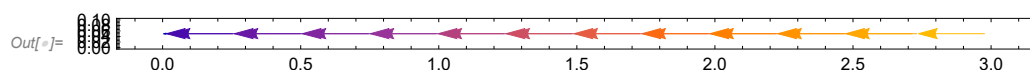
**Изобразите** фазовые траектории, например, с помощью функции **StreamPlot** решений динамической системы для случая постоянных коэффициентов  $\alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$  и  $\beta(t) = \beta_0 = \text{const}$  при  $\alpha_0 < \beta_0$ ,  $\alpha_0 = \beta_0$ ,  $\alpha_0 > \beta_0$ .

Пользуясь определением устойчивости в фазовом пространстве **проанализируйте**, являются ли положения равновесия динамической системы устойчивыми при условии, что  $M(t) \geq 0$ .

Например, для случая, когда рождаемость меньше смертности, т.е.  $\alpha_0 < \beta_0$ , имеем, что положение равновесия  $N(t) \equiv 0$  является устойчивым.

```
In[ ]:=  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 2$ ;
```

```
In[ ]:= StreamPlot[{(α - β) x, 0}, {x, 0, 3}, {y, 0, .1},  
  AspectRatio → Automatic, ImageSize → {{500, 20}}]
```



## Задание 2. Логистическая модель или модель Ферхюльста

### Содержательная постановка задачи

Рассмотрим популяцию больших размеров, численность которой измеряется миллионами и более. Полагаем, что сдерживающим фактором роста популяции является ограниченность ресурсов. Пренебрегаем процессами иммиграции и эмиграции. Необходимо определить изменение численности популяции во времени.

### Концептуальная постановка задачи и математическая модель

Логистическая модель или модель Ферхюльста (1838, 1845) принимает во внимание ограниченность доступных популяции ресурсов. В частности, считается, что существует равновесная численность популяции  $N_p = \text{const} > 0$ , которую может обеспечить окружающая среда, т.е.  $M(t) \rightarrow N_p$  при  $t \rightarrow \infty$ . Это свойство называется эффектом насыщения численности населения.

При моделировании полагается также, что скорость изменения численности популяции пропорциональна самой численности с коэффициентом пропорциональности  $k = \text{const} > 0$ , дополнительно умноженной на величину отклонения численности от равновесного значения  $N_p$

$$M'(t) = M(t) k \left( 1 - \frac{M(t)}{N_p} \right), \quad k = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Логистической моделью называется задача Коши для уравнения (3) при заданном начальном условии в момент времени  $t = t_0$

$$M'(t) = M(t) k \left( 1 - \frac{M(t)}{N_p} \right), \quad (4)$$

$$M(t_0) = M_0.$$

### Замечания

Предположение о механизмах насыщения используются при построении многих моделей в различных областях знаний.

Существенным недостатком логистической модели является тот факт, что равновесная численность популяции  $N_p$  вводится в качестве известного параметра, в то время как нахождение этой величины нередко является основной задачей исследования.

Современные прогнозы показывают, что численность человечества в обозримом будущем стабилизируется на уровне  $N_p = 12 \cdot 10^9$  человек. Такой же прогноз дается ООН.

## Задание 2.1 (аналитическое решение)

**Постройте** аналитическое решение логистической модели (4), например, методом разделения переменных для заданной численности населения  $N_0$  в начальный момент времени  $t_0$ .

**Сравните** построенное аналитическое решение и решение, полученное с помощью функции **DSolve (DSolveValue)**.

**Напишите** пользовательскую функцию для задания аналитического решения логистической модели, где  $k > 0$ ,  $N_p > 0$ ,  $N_0 \geq 0$  и  $t_0 \geq 0$  являются аргументами функции.

## Задание 2.2 (график аналитического решения)

**Изобразите** в одной системе координат графики функции  $N(t)$  для фиксированных значений  $k$ ,  $N_p$  и  $t_0$  и различных значений  $N_0$ . Рассмотрите случаи, когда  $N_0 < N_p$ ,  $N_0 = N_p$ ,  $N_0 > N_p$ . При выполнении задания используйте пользовательскую функцию из Задания 2.1 для описания аналитического решения логистической модели.

## Задание 2.3 (качественный анализ модели по решению)

На основании построенных графиков в Задании 2.2 **сформулируйте** выводы о качественном поведении решения логистической модели при  $t \rightarrow \infty$  для случаев  $N_0 < N_p$ ,  $N_0 = N_p$ ,  $N_0 > N_p$  при  $k > 0$ .

На основании построенных графиков в Задании 2.2 **проанализируйте**, является ли положение равновесия  $N(t) \equiv N_p$ , соответствующее решению модели при  $N_0 = N_p$ , устойчивым по начальным данным?

## Задание 2.4 (качественный анализ модели по фазовому портрету)

Фазовое пространство для рассматриваемой динамической системы первого порядка является одномерным и представляет собой прямую линию  $ON$ , которая ограничена значениями  $N \geq 0$  в силу того, что  $N(t)$  является численностью населения.

**Изобразите** фазовые траектории решений динамической системы, например, с помощью функции **StreamPlot**.

Пользуясь определением устойчивости в фазовом пространстве **проанализируйте**, являются ли положения равновесия динамической системы устойчивыми при условии, что  $k > 0$ ,  $N(t) \geq 0$ .

# Задание 3. Нелинейный аналог модели Мальтуса

## Содержательная постановка задачи

Рассмотрим популяцию больших размеров, численность которой измеряется миллионами и более. Полагаем, что не существует факторов, сдерживающих рост популяции, таких как

болезни, хищники, конкурирующие виды, ограниченность питания и др. Полагаем также, что особи популяции заинтересованы в росте популяции. Пренебрегаем процессами иммиграции и эмиграции. Необходимо определить изменение численности популяции во времени.

## Математическая модель

Полагаем, что коэффициент рождаемости пропорционален численности населения  $\alpha(N) = \alpha_0 N$ , так как особи популяции заинтересованы в ее росте, где  $\alpha_0 = \text{const} > 0$ . Коэффициент смертности полагаем постоянным  $\beta(t) = \beta_0 = \text{const} > 0$ . Тогда уравнение Мальтуса (1) преобразуется к виду

$$N'(t) = N(t) (\alpha_0 N(t) - \beta_0) \quad (5)$$

с квадратичной нелинейностью в правой части.

Математической моделью называется задача Коши для уравнения (5) при заданном начальном условии в момент времени  $t = t_0$

$$\begin{aligned} N'(t) &= N(t) (\alpha_0 N(t) - \beta_0), \\ N(t_0) &= N_0. \end{aligned} \quad (6)$$

### Задание 3.1 (аналитическое решение)

**Постройте** аналитическое решение нелинейной модели (6) для заданной численности населения  $N_0$  в начальный момент времени  $t_0$ . При построении аналитического решения необходимо отдельно рассматривать случаи, когда  $N_0 < N_{\text{кр}}$ ,  $N_0 = N_{\text{кр}}$ ,  $N_0 > N_{\text{кр}}$ , где  $N_{\text{кр}} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$ .

При  $N_0 > N_{\text{кр}}$  решение строится только на отрезке  $[t_0, t^*]$ , где  $t^*$  необходимо найти из условия  $\lim_{t \rightarrow t^*} N(t) = +\infty$ .

**Сравните** построенное аналитическое решение и решение, полученное с помощью функции **DSolve (DSolveValue)**.

**Напишите** пользовательскую функцию для задания аналитического решения нелинейной модели Мальтуса, где  $N_{\text{кр}} > 0$ ,  $\beta_0 > 0$ ,  $N_0 \geq 0$  и  $t_0 \geq 0$  являются аргументами функции.

### Задание 3.2 (график аналитического решения)

**Изобразите** в одной системе координат графики функции  $N(t)$  для фиксированных значений  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  и различных значений  $N_0$ . Рассмотрите случаи  $N_0 < N_{\text{кр}}$ ,  $N_0 = N_{\text{кр}}$ ,  $N_0 > N_{\text{кр}}$ , где  $N_{\text{кр}} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$ .

При выполнении задания используйте пользовательскую функцию из Задания 3.1 для описания аналитического решения нелинейной модели Мальтуса.

### Задание 3.3 (качественный анализ модели по решению)

На основании построенных графиков в Задании 3.2 **сформулируйте** выводы о качественном поведении решения нелинейной модели при  $t \rightarrow \infty$  для случаев  $N_0 < N_{\text{кр}}$ ,  $N_0 = N_{\text{кр}}$ ,  $N_0 > N_{\text{кр}}$ ,

$$N_{\text{кр}} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}.$$

На основании построенных графиков в Задании 3.2 **проанализируйте**, является ли

положение равновесия  $M(t) \equiv N_{кр}$ , соответствующее решению модели при  $N_0 = N_{кр}$ , устойчивым по начальным данным?

### Задание 3.4 (качественный анализ модели по фазовому портрету)

Фазовое пространство для рассматриваемой динамической системы первого порядка является одномерным и представляет собой прямую линию  $ON$ , которая ограничена значениями  $N \geq 0$  в силу того, что  $M(t)$  является численностью населения.

**Изобразите** фазовые траектории решений динамической системы, например, с помощью функции **StreamPlot**.

Пользуясь определением устойчивости в фазовом пространстве **проанализируйте**, являются ли положения равновесия динамической системы устойчивыми при условии  $M(t) \geq 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\beta_0 > 0$ .

## Задание 4. Предсказание численности населения Беларуси через 100 лет по заданным параметрам модели

На основе модели Мальтуса с постоянными коэффициентами из Задания 1 и на основе нелинейной модели из Задания 3 **сделайте предсказания** о численности населения Беларуси через 100 лет. Значения параметров модели  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $N_0$ ,  $t_0$  определите, используя информацию из базы знаний Wolfram Alpha. Обратите внимание, что коэффициент рождаемости  $\alpha_0$ , полученный из базы знаний Wolfram Alpha, должен быть изменен для использования в нелинейной модели Мальтуса:  $\alpha_{0, \text{nonlinear}} = \alpha_0 / N_0$ .

**Сравните данные** о численности населения Беларуси из базы знаний Wolfram Alpha с решением модели Мальтуса и с решением нелинейной модели Мальтуса.

### Некоторые рекомендации по работе с базой знаний Wolfram Alpha

Создадим объект типа "Country", ассоциированный с данными для имени "Belarus"

```
In[ ]:= entityBelarus = Entity["Country", "Belarus"];
```

Получим необходимые свойства объекта entityBelarus и уберем размерности величин

```
In[ ]:= {N0, α0, β0} = QuantityMagnitude@EntityValue[entityBelarus, #] & /@
{"Population", "BirthRateFraction", "DeathRateFraction"}
```

```
Out[ ]:= {9449321, 0.0119, 0.0133}
```

Определим дату, которой соответствуют полученные данные

```
In[ ]:= EntityValue[entityBelarus, #, "Date"] & /@
{"Population", "BirthRateFraction", "DeathRateFraction"}
```

```
Out[ ]:= {Year: 2020, Year: 2017, Year: 2017}
```

```
In[ ]:= t0 = 2017;
```

Скорректируем значение начальной популяции

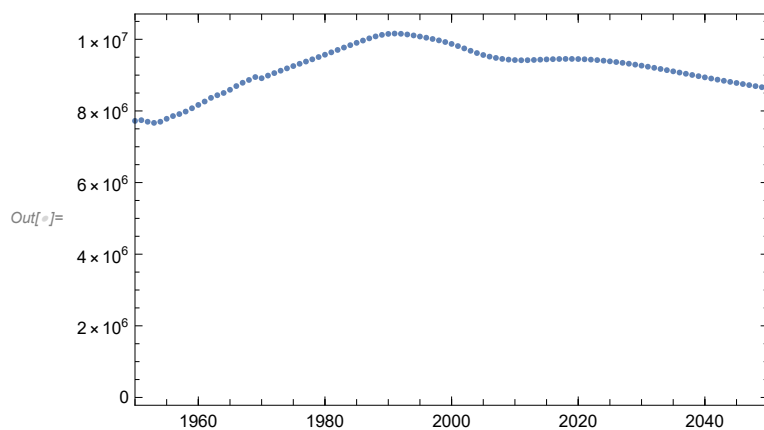
```
In[ ]:= N0 = QuantityMagnitude@Dated[entityBelarus, 2017] ["Population"]
```

```
Out[ ]:= 9 450 233
```

Построим график функции для всех значений свойства "Population", которые хранятся в базе знаний

```
In[ ]:= ts = Dated[entityBelarus, All] ["Population"];
```

```
In[ ]:= DateListPlot[ts, PlotRange → {"1950", "2050"}, All], Joined → False]
```



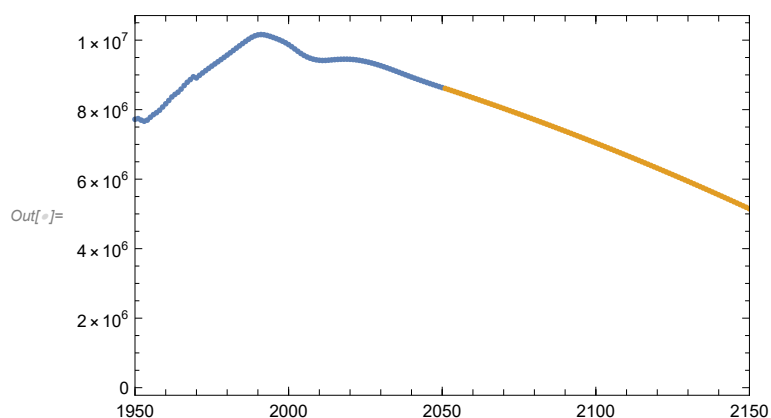
С помощью функций **TimeSeriesModelFit** и **TimeSeriesForecast** сделаем предсказание на следующие 100 лет по имеющимся данным из базы знаний WolframAlpha

```
In[ ]:= tsModel = TimeSeriesModelFit[ts];
```

```
tsForecast = TimeSeriesForecast[tsModel, {100}];
```

 **TemporalData**: The data is not uniformly spaced and will be automatically resampled to the resolution of the minimum time increment.

```
In[ ]:= DateListPlot[{ts, tsForecast}, PlotRange → {"1950", "2150"}, All], Joined → False]
```



```
In[ ]:= tsForecast["SliceData", "2123"]
```

```
Out[ ]:= { 6.20645 × 10^6 people }
```

## Задание 5. Предсказание численности населения стран по историческим данным

По историческим данным о численности населения для заданной страны в период с 1950 года до 2010 года **сделайте предсказания** о значениях неизвестных параметров для

- модели Мальтуса с постоянными коэффициентами (см. Задание 1),
- логистической модели (см. Задание 2) и
- нелинейного аналога модели Мальтуса (см. Задание 3),

полагая, что  $t_0 = 1950$  и  $N_0$  являются заданными. Для этого необходимо аппроксимировать исторические данные функциями аналитических решений для указанных моделей с помощью функции **FindFit**.

**Постройте графики** относительной ошибки для найденных модельных решений в сравнении с реальными данными о численности населения.

Страны по вариантам:

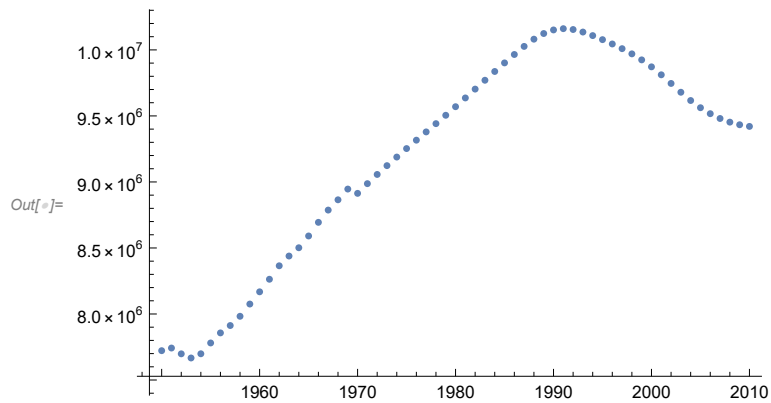
1. Россия
2. Китай
3. Япония
4. Швеция
5. Франция
6. Греция
7. Марокко
8. Великобритания
9. Германия
10. Турция
11. Нидерланды
12. Бельгия
13. Катар
14. Египет

### Рекомендации по выполнению Задания 5

Воспользуемся данными из базы знаний Wolfram Alpha для Беларуси

```
In[ ]:= data = { #, QuantityMagnitude@Dated[entityBelarus, #] ["Population"]} & /@
Range[1950, 2010];
```

```
In[ ]:= ListPlot[data]
```



Параметры модели  $t_0$  и  $N_0$  полагаем заданными

```
In[ ]:= {t0, N0} = First@data
```

```
Out[ ]:= {1950, 7 722 155}
```

Найдем неизвестные параметры для модели Мальтуса с использованием функции **FindFit**

```
In[ ]:= ClearAll[k, t]
```

```
In[ ]:= solutionMalthus = N0 Exp[k (t - t0)];
```

```
In[ ]:= FindFit[data, solutionMalthus, {k}, t]
```

```
Out[ ]:= {k -> 0.00523589}
```

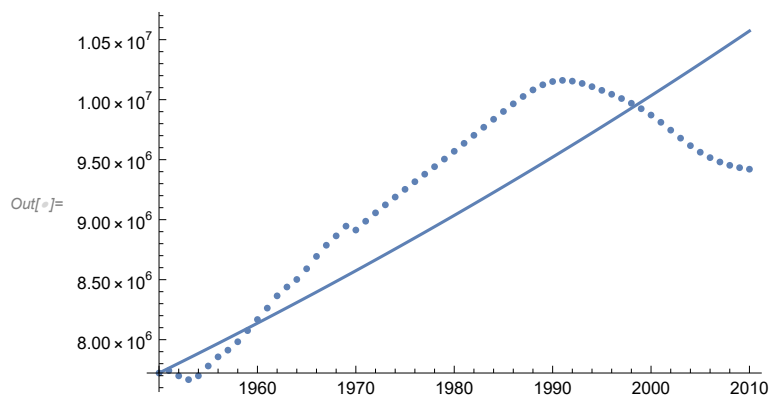
Построим аналитическое решение для модели Мальтуса

```
In[ ]:= solutionMalthus = solutionMalthus /. FindFit[data, solutionMalthus, {k}, t]
```

```
Out[ ]:= 7 722 155 e^{0.00523589 \times (-1950 + t)}
```

Построим график популяционной динамики на основании модели Мальтуса

```
In[ ]:= Show[Plot[solutionMalthus, {t, 1950, 2010}], ListPlot[data]]
```



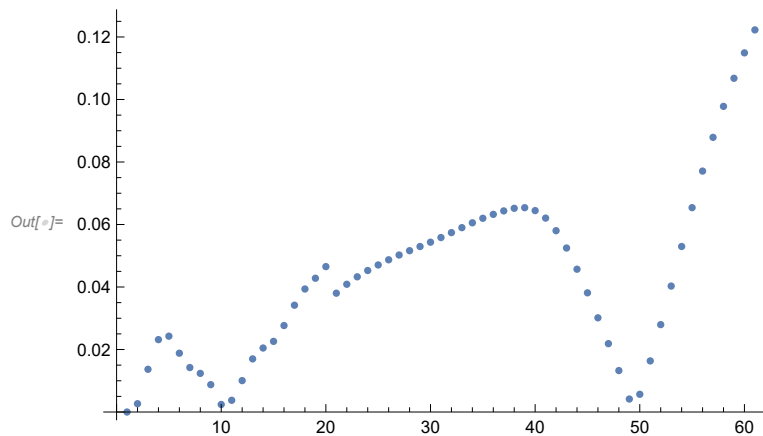
Построим график относительной ошибки для модели Мальтуса

```
In[ ]:= errorMalthus = (Abs[Last@# - (solutionMalthus /. t -> First@#)] / Last@#) & /@ data;
```

```
In[ ]:= {Norm[errorMalthus], Norm[errorMalthus, Infinity]}
```

```
Out[ ]:= {0.39922, 0.122267}
```

```
In[ ]:= ListPlot[errorMalthus]
```



## Задание 6. Предельный рост численности населения Земли

По данным о численности населения Земли, доступным из базы знаний Wolfram Alpha, **сделайте предсказание** о значении неизвестного параметра  $\alpha_0 > 0$  для нелинейного аналога модели Мальтуса (см. Задание 3), полагая, что  $\beta_0 = 0$ ,  $t_0$  и  $N_0$  являются заданными. Для нахождения неизвестного параметра модели  $\alpha_0$  необходимо аппроксимировать реальные данные функцией аналитического решения с помощью функции **FindFit**, см. Задание 5.

В рамках нелинейного аналога модели Мальтуса для найденного значения параметра  $\alpha_0$  **сделайте предсказание** о моменте времени  $t^*$ , при котором численность населения Земли примет бесконечное значение, т.е.  $\lim_{t \rightarrow t^*} M[t] = +\infty$ , см. формулу из Задания 3.1.

**Изобразите** данные о численности населения Земли из базы знаний Wolfram Alpha, а также модельное решение на временном отрезке  $[t_0, t^*]$ .

**Постройте** график относительной ошибки для найденного модельного решения в сравнении с реальными данными о численности населения Земли, см. Задание 5.

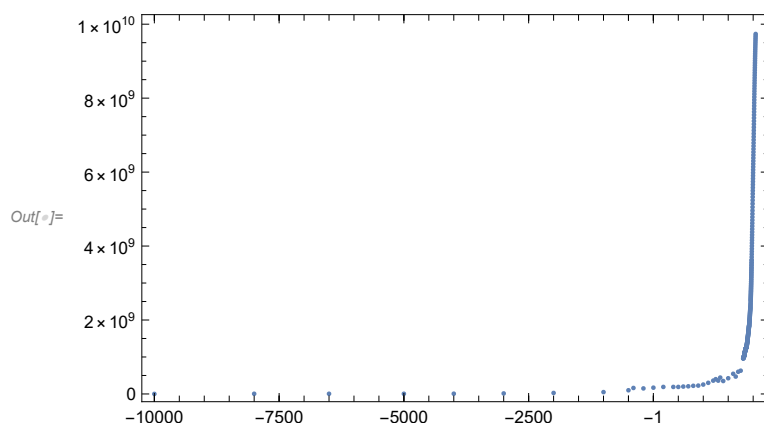
### Рекомендации по выполнению Задания 6

Воспользуемся данными из базы знаний Wolfram Alpha о численности населения Земли

```
In[ ]:= entityWorld = Entity["Country", "World"];
```

```
In[ ]:= dataWorld = Dated[entityWorld, All] ["Population"];
```

```
In[ ]:= DateListPlot[dataWorld, Joined→False]
```



Параметры модели  $t_0$  и  $N_0$  полагаем заданными

```
In[ ]:= {t0, N0} = {Normal @ dataWorld["FirstDate"], Normal @ dataWorld["FirstValue"]}
```

```
Out[ ]:= {Mon 1 Jan -10000 00:00:00 GMT+3, 1. × 10^6}
```

## Задание 7\* (необязательное). Математическая модель радиоактивного распада

**Сформулируйте математическую модель** радиоактивного распада вещества по аналогии с моделью Мальтуса из Задания 1. Для этого сделайте предположение, что скорость распада радиоактивного вещества пропорционален количеству этого вещества  $x = x(t)$ , где коэффициент пропорциональности является постоянным  $k = \text{const} < 0$ . Математическая модель формулируется в виде задачи Коши с начальным условием  $x(t) = x_0$ . Для более подробной информации смотрите [5, с. 18].

Используя вид аналитического решения математической модели, **найдите зависимость** между коэффициентом пропорциональности  $k$  и временем  $T$  полураспада радиоактивного вещества, когда  $x(T) = x_0/2$ ?

**Решите задачи** 2.7 (определение времени почти полного распада вещества) и 2.8 (определение возраста горной породы) из [5, с.18].

## Задание 8\* (необязательное). Математическая модель распространения нового продукта на рынке

Данное задание является примером построения и анализа математической модели в экономике.

**Сформулируйте математическую модель** распространения нового продукта или услуги на рынке (модель Басса). В качестве неизвестной величины рассматривается количество пользователей  $N(t)$  некоторого продукта или услуги на рынке. Используя принцип аналогии

полагается, что за счет рекламы скорость изменения пользователей  $N'(t)$  пропорциональна числу потенциальных клиентов  $N_0 - N(t)$ , где  $N_0$  -- общее количество людей на рынке. Дополнительно в модели учитывается эффект косвенной рекламы за счет общения пользователей продукта с потенциальными клиентами. Для более подробной информации смотрите [1, с. 150].

**Найдите** момент времени, начиная с которого продолжать рекламу становится невыгодным. Для более подробной информации смотрите [1, с. 150].

---

## Литература

- [1] А. А. Самарский, А. П. Михайлов. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. -- М.: Физматлит, 2001.
- [2] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. -- 2011.
- [3] Д. Мюррей. Математическая биология. Том I. Введение. -- М.-Ижевск, 2009.
- [4] B. Barnes and G. R. Fulford. Mathematical Modelling with Case Studies: A differential equation approach using Maple and MATLAB. Second Edition. -- CRC Press, 2008.
- [5] Р. А. Прохорова. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие. -- Мн. : БГУ, 2017. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/205697>
- [6] В. В. Амелькин. Дифференциальные уравнения : учебное пособие. -- Мн. : БГУ, 2012. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/43871>