

Математическое моделирование динамических процессов I

Дисциплина для студентов специальности
«Компьютерная математика и системный анализ»

доц. Лаврова О.А.

механико-математический факультет, БГУ, Минск

2023

Тема 5. Дискретные математические модели

Мотивация

Дискретные математические модели активно используются для моделирования *биологических процессов*, когда наблюдения над объектом моделирования осуществляются в **дискретные моменты времени**.

В частности, дискретные модели применяются для описания *динамики численности популяций насекомых или рыб*, для которых характерны непересекающиеся во времени поколения (например, личинка, куколка, взрослое насекомое). Поколения не взаимодействуют, численности поколений связаны, изменения численности осуществляются в дискретные моменты времени.

Содержание Темы 5

- 1. Дискретная динамическая система.** Примеры
2. Графический метод построения решения одномерной ДДС
3. неподвижная точка ДДС. Бифуркационная диаграмма
4. Устойчивость неподвижной точки ДДС. Цикл ДДС.
5. Дискретная логистическая модель. Каскад удвоения периода. Бифуркационная диаграмма Фейгенбаума

Дискретная динамическая система

Дискретная динамическая система (ДДС) или *динамическая система с дискретным временем* описывается *рекуррентным соотношением*

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad \mathbf{x}_n \in D \subset \mathbb{R}^m \quad (1)$$

где $\mathbf{f}: D \rightarrow D$ – заданное отображение.

\mathbf{x}_n – это состояние системы в момент времени $t = n$, где шаг по времени нормирован.

Решение ДДС – это последовательность состояний вида

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \dots,$$

где \mathbf{x}_0 -- **начальное состояние**, $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, $n = 0, 1, \dots$

Различным начальным состояниям соответствуют различные решения ДДС.

Решение ДДС называют также *траекторией ДДС* или *орбитой*, стартующей из точки \mathbf{x}_0 и порождённой отображением \mathbf{f} .

Дискретная модель экспоненциального роста

Рассмотрим **одномерную** ДДС

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n \in \mathbb{R}$$

где $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

Модель называется **дискретной моделью экспоненциального роста**.

Решением модели является последовательность вида

$$x_0, kx_0, k^2x_0, \dots, k^n x_0, \dots$$

Это *геометрическая прогрессия* со знаменателем k , $x_n = k^n x_0$, $n = 1, 2, \dots$

Дискретная модель экспоненциального роста применяется, в частности, для моделирования ранних стадий размножения определенных видов бактерий.

Дискретная модель Мальтуса

Концептуальная постановка задачи

- N_n – количество особей некоторого вида в n -ом временном интервале
- Каждая особь рождает в среднем $b = const > 0$ особей в течение n -ого временного интервала

$$N_{n+1} = bN_n$$

- Вероятность выживания особи к следующему временному интервалу равна $s = const \in [0,1]$

$$N_{n+1} = bN_n + sN_n = kN_n,$$

где $k = b + s = const > 0$.

Дискретная модель Мальтуса

$$N_{n+1} = kN_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

является примером дискретной модели экспоненциального роста

Связь непрерывной и дискретной моделей Мальтуса

Дискретная модель Мальтуса может быть построена из непрерывной модели

$$N' = (\alpha - \beta)N$$

с помощью *явного метода Эйлера* для построения разностного уравнения

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{\Delta t} = (\alpha - \beta)N_n$$
$$N_{n+1} = (1 + \Delta t(\alpha - \beta))N_n = \alpha\Delta t N_n + (1 - \Delta t\beta)N_n$$

Имеем, что

коэффициент рождаемости $\alpha = \frac{b}{\Delta t}$ определяется количеством рожденных каждой особью в единицу времени

коэффициент смертности $\beta = \frac{1-s}{\Delta t}$ определяется вероятностью смертности одной особи в единицу времени

Модель Лесли

Рассмотрим m -мерную ДДС

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A \mathbf{x}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Решение ДДС – это последовательность вида

$$x_0, Ax_0, A^2x_0, \dots, A^n x_0, \dots$$

где $x_n = A^n x_0$, $n = 1, 2, \dots$

Приведенная модель в контексте моделей популяционной динамики называется **модель Лесли**. Она применяется для описания динамики возрастного состава популяции.

Решение ДДС в виде чисел Фибоначчи I

Рассмотрим *последовательность чисел Фибоначчи*

$$N_0 = 1, N_1 = 1, N_{n+1} = N_{n-1} + N_n, \quad n = 2, \dots \quad (2)$$

Введем новую переменную $M_{n+1} := N_n$.

В новых обозначениях числа Фибоначчи можно записать так

$$\begin{cases} N_{n+1} = M_n + N_n \\ M_{n+1} = N_n \end{cases} \text{ или в матричном виде } \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}_n$$

где $\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Последовательность чисел Фибоначчи является решением **двумерной** ДДС

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, для $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Это частный случай *модели Лесли*.

Решение ДДС в виде чисел Фибоначчи II

$$N_0 = 1, N_1 = 1, N_{n+1} = N_{n-1} + N_n, n = 2, \dots \quad (2)$$

Представление математической модели в виде (2) было предложено итальянским математиком Леонардо Пизанским в 1202 году для описания динамики *численности популяции кроликов*.

Концептуальная постановка задачи

- N_n – количество пар из мужской и женской особей в n -ый месяц
- Каждая пара рождает пару кроликов каждый месяц

$$N_{n+1} = N_n(\text{кролики}) + N_n(\text{новорожденные})$$

- Рожают кролики со второго месяца после рождения

$$N_{n+1} = N_n(\text{кролики}) + N_{n-1}(\text{новорожденные})$$

- Особи не погибают
- В начальный момент времени имеется одна пара, $N_0 = 1$

Дискретная логистическая модель I

Дискретная логистическая модель может быть построена из непрерывной модели

$$N' = kN \left(1 - \frac{N}{N_p} \right), \quad k = \text{const} > 0, N_p = \text{const} > 0$$

с помощью явного метода Эйлера для построения разностного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{N_{n+1} - N_n}{\Delta t} &= kN_n \left(1 - \frac{N_n}{N_p} \right), \\ N_{n+1} &= N_n \left(1 + \Delta t k N_n \left(1 - \frac{N_n}{N_p} \right) \right), \\ N_{n+1} &= (1 + \Delta t k) N_n \left(1 - \frac{\Delta t k}{(1 + \Delta t k) N_p} N_n \right). \end{aligned}$$

Делаем замену переменных $N_n^* = \frac{\Delta t k}{(1 + \Delta t k) N_p} N_n$. Тогда

$$N_{n+1}^* = k^* N_n^* (1 - N_n^*), \quad k^* = 1 + \Delta t k = \text{const} > 0 \quad (3)$$

В дальнейшем опустим * в обозначениях

Дискретная логистическая модель II

$$N_{n+1} = kN_n(1 - N_n) \quad (3)$$

Недостатком практического применения безразмерной дискретной логистической модели (3) для задач популяции является тот факт, что для $N_n > 1$ имеем, что $N_{n+1} < 0$.

В связи с этим налагается ограничение на начальное состояние системы $0 < N_0 \leq 1$. Дополнительно из ограничения $0 < kx(1 - x) \leq 1$ и $\max\{kx(1 - x) : 0 \leq x \leq 1\} = \frac{k}{4}$ следует, что $0 < k \leq 4$.

Делаем вывод, что необходимыми ограничениями на параметры модели (3) для ее практического применения для задач популяции являются следующие условия

$$0 < k \leq 4, \quad 0 < N_0 \leq 1$$

Содержание Темы 5

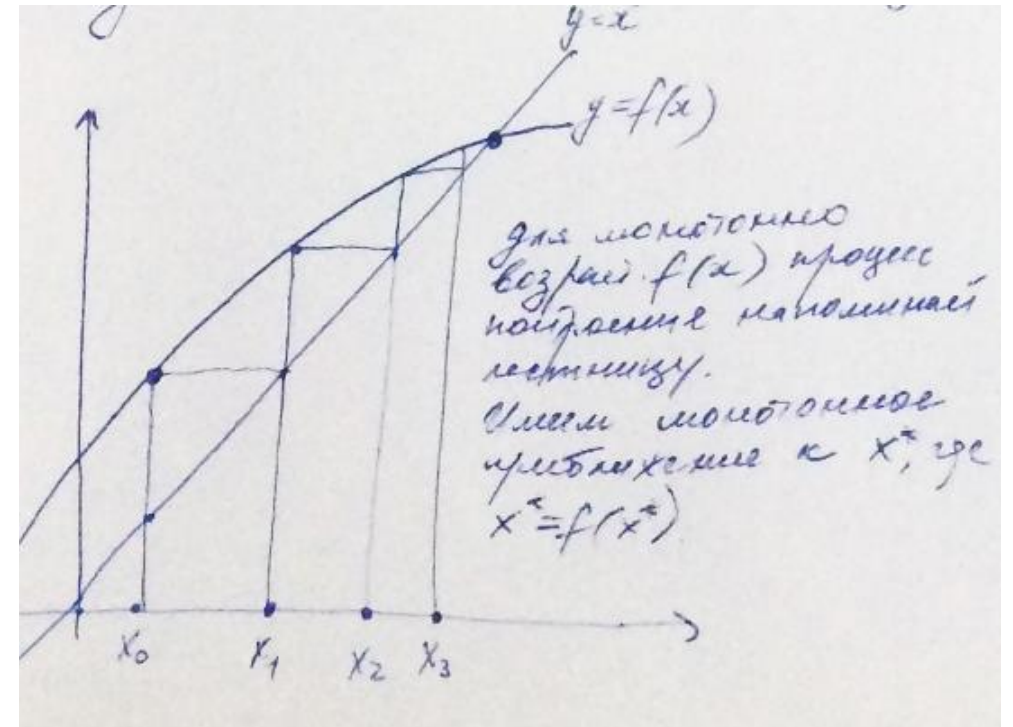
1. Дискретная динамическая система. Примеры
2. Графический метод построения решения одномерной ДДС
3. неподвижная точка ДДС. Бифуркационная диаграмма
4. Устойчивость неподвижной точки ДДС. Цикл ДДС.
5. Дискретная логистическая модель. Каскад удвоения периода. Бифуркационная диаграмма Фейгенбаума

Графический метод построения решения ДДС I

Поведение решения **одномерной** ДДС $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_n \in \mathbb{R}$

можно анализировать на основании графического представления, когда решения ДДС строятся в двумерной плоскости (x, y) с использованием графического метода **лестница Ламерея** или **паутинная диаграмма**.

1. строим графики $y = f(x)$, $y = x$
 2. отмечаем точку $(x_0, 0)$, соответствующую начальному состоянию
 3. соединяем по вертикали $(x_0, 0)$ и $(x_0, f(x_0))$
 4. соединяем по горизонтали $(x_0, f(x_0))$ и (x_1, x_1)
 5. соединяем по вертикали (x_1, x_1) и $(x_1, f(x_1))$
 6. соединяем по горизонтали $(x_1, f(x_1))$ и (x_2, x_2)
- и т.д.

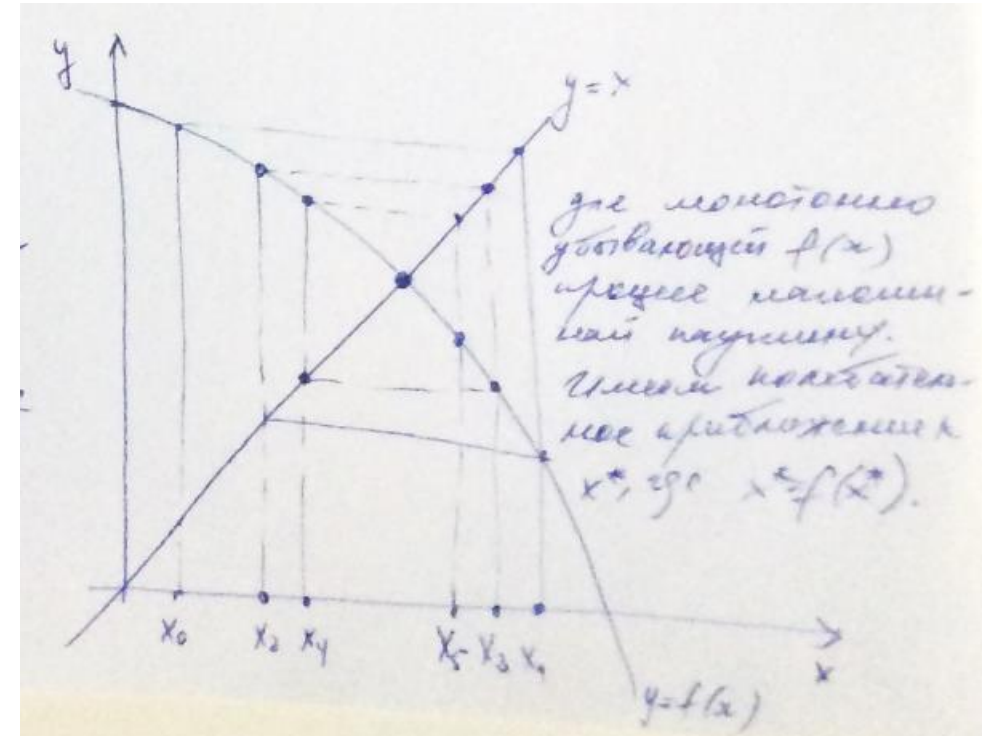


Графический метод построения решения ДДС II

Поведение решения **одномерной** ДДС $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_n \in \mathbb{R}$

можно анализировать на основании графического представления, когда решения ДДС строятся в двумерной плоскости (x, y) с использованием графического метода **лестница Ламерея** или **паутинная диаграмма**.

1. строим графики $y = f(x)$, $y = x$
 2. отмечаем точку $(x_0, 0)$, соответствующую начальному состоянию
 3. соединяем по вертикали $(x_0, 0)$ и $(x_0, f(x_0))$
 4. соединяем по горизонтали $(x_0, f(x_0))$ и (x_1, x_1)
 5. соединяем по вертикали (x_1, x_1) и $(x_1, f(x_1))$
 6. соединяем по горизонтали $(x_1, f(x_1))$ и (x_2, x_2)
- и т.д.



Содержание Темы 5

1. Дискретная динамическая система. Примеры
2. Графический метод построения решения одномерной ДДС
3. неподвижная точка ДДС. Бифуркационная диаграмма
4. Устойчивость неподвижной точки ДДС. Цикл ДДС.
5. Дискретная логистическая модель. Каскад удвоения периода. Бифуркационная диаграмма Фейгенбаума

Неподвижная точка ДДС I

Неподвижная точка ДДС (стационарная точка, положение равновесия, состояние равновесия) – это решение ДДС, которое не изменяется во времени

$$x_0, x_0, \dots, x_0, \dots$$

Неподвижная точка определяется из решения уравнения

$$x = f(x).$$

При построении решения ДДС графическим методом (лестница Ламерея или паутиная диаграмма) неподвижные точки являются абсциссами точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = x$.

Неподвижная точка ДДС II

Рассмотрим **модель экспоненциального роста**

$$x_{n+1} = kx_n, \quad x_n \in \mathbb{R}$$

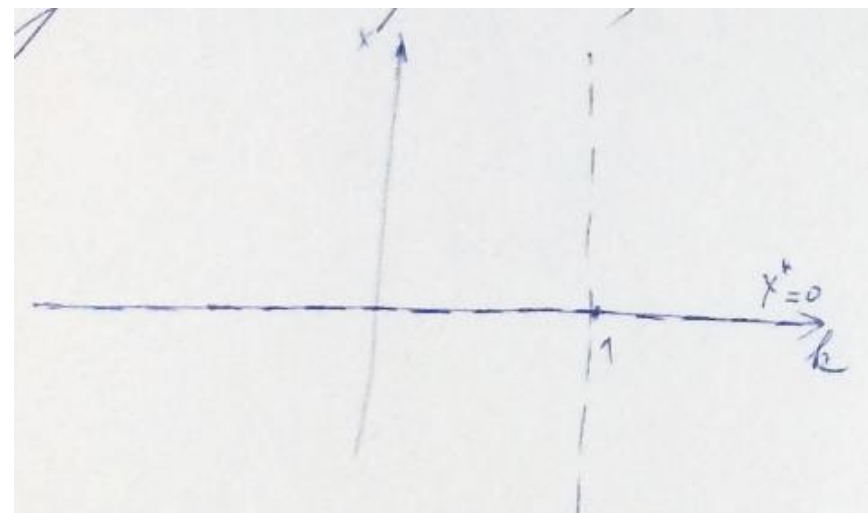
где $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

Неподвижные точки определяются из решения уравнения $x = kx$

$$x^* = \begin{cases} 0, & k \neq 1 \\ \mathbb{R}, & k = 1 \end{cases}$$

Для описания качественного поведения ДДС строится **бифуркационная диаграмма в фазово-параметрическом пространстве (k, x)** ,

в котором отображаются неподвижные точки в зависимости от значения параметра с обозначением устойчивости неподвижных точек: устойчивые неподвижные точки отображаются сплошными линиями, неустойчивые – пунктирными линиями.



Неподвижная точка ДДС III

Рассмотрим **дискретную логистическую модель**

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n), \quad x_n \in \mathbb{R}$$

где $f(x) = kx(1 - x)$, $0 < k \leq 4$.

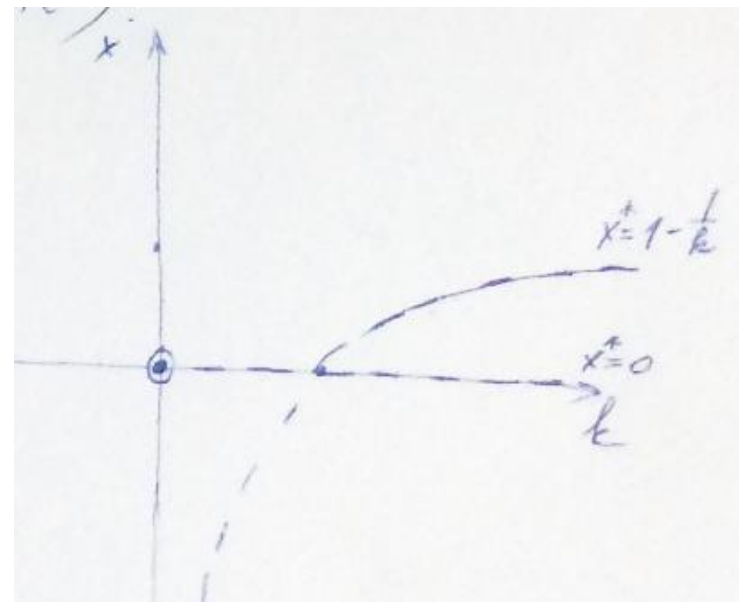
Неподвижные точки определяются из решения уравнения

$$x = kx(1 - x) \text{ или } x(1 - k(1 - x)) = 0$$

$$x^* = \begin{cases} 0, & 0 < k \leq 4 \\ 1 - \frac{1}{k}, & 0 < k \leq 4 \end{cases}$$

Обратите внимание, что значения неподвижных точек ДДС зависят от параметра.

Обратите внимание, что неподвижные точки непрерывной и дискретной ДС не совпадают.



Устойчивость неподвижной точки ДДС I

Неподвижная точка ДДС x^* **устойчивая**, если любое решение с начальным состоянием x_0 из окрестности x^* останется вблизи x^* и во все последующие моменты времени $n = 1, 2, \dots$ (устойчивость по Ляпунову).

Неподвижная точка ДДС x^* **асимптотически устойчивая**, если $\exists r > 0$, что $\forall x_0 \in B(x^*, r), x_n \rightarrow x^*$ при $n \rightarrow \infty$.

Асимптотически устойчивые точки иногда называют *аттракторами*.

Неустойчивые неподвижные точки иногда называют *репеллерами*.

Устойчивость неподвижной точки ДДС II

Теорема. Рассмотрим *одномерную* ДДС $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_n \in \mathbb{R}$, где f дифференцируемая функция. Пусть x^* – неподвижная точка ДДС. Если $|f'(x^*)| < 1$, тогда неподвижная точка x^* является асимптотически устойчивой. Если $|f'(x^*)| > 1$, тогда неподвижная точка x^* является неустойчивой.

Случай $|f'(x^*)| = 1$ требует дополнительного анализа. В неподвижной точке, для которой $|f'(x^*)| = 1$, происходит изменение характера устойчивости неподвижной точки и/или переход на новую неподвижную точку.

Значения параметров модели, при которых $|f'(x^*)| = 1$, называются **первыми бифуркационными значениями параметра** или **точками бифуркации**.

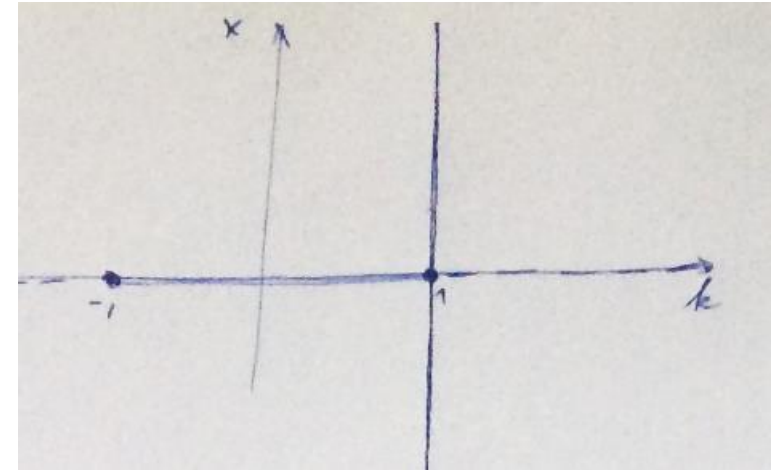
Устойчивость неподвижной точки ДДС III

Рассмотрим **модель экспоненциального роста**

$$x_{n+1} = kx_n, \quad x_n \in \mathbb{R}$$

где $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Неподвижные точки $x^* = \begin{cases} 0, & k \neq 1 \\ \mathbb{R}, & k = 1 \end{cases}$

$$f'(x^*) = k, \forall x^*$$



Неподвижная точка $x^* = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{асимптотически устойчивая при } |k| < 1 \\ \text{неустойчивая при } |k| > 1 \\ k = \pm 1 \text{ — первые бифуркационные значения параметра} \end{array} \right.$

Неподвижные точки $x^* = \mathbb{R}$ при $k = 1$ требуют дополнительного исследования

При $k = -1$ решение имеет вид $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots$, следовательно $\forall x_0$ вблизи x^* решение останется в окрестности x^* . x^* — устойчивая неподвижная точка (не асимптотически)

При $k = 1$ решение имеет вид $x_0, x_0, x_0, x_0, \dots$, следовательно $\forall x_0$ вблизи x^* решение останется в окрестности x^* . x^* — устойчивая неподвижная точка (не асимптотически)

Устойчивость неподвижной точки ДДС IV

Теорема. Рассмотрим *многомерную* ДДС $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_n \in \mathbb{R}^m$, где f дифференцируемая функция. Пусть x^* – неподвижная точка ДДС. Если спектральный радиус матрицы Якоби $\rho(Df(x^*)) < 1$, тогда неподвижная точка x^* является асимптотически устойчивой. Если существует собственное значение матрицы Якоби $|\lambda_i| > 1$, тогда неподвижная точка x^* является неустойчивой.

$$\rho(Df(x^*)) = \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|$$

В *одномерном* случае $Df(x^*) = f'(x^*)$ – **собственное значение ДДС** в неподвижной точке. $\rho(Df(x^*)) = |f'(x^*)|$

Цикл ДДС I

Циклом длины p ДДС (p -периодическим решением ДДС) называется множество состояний ДДС x_1, \dots, x_p таких, что

$$x_2 = f(x_1), \dots, x_p = f(x_{p-1}), x_1 = f(x_p)$$

Имеем, что $x_1 = f(x_p) = f^{(2)}(x_{p-1}) = \dots = f^{(p)}(x_1)$, т.е.

x_1 — неподвижная точка отображения $f^{(p)}(x)$, где

$f^{(p)}(x)$ — это p -ая композиция отображения $f(x)$

Если x_1 является неподвижной точкой отображения $f^{(p)}(x)$, то ВСЕ состояния, входящие в цикл, являются неподвижными точками отображения $f^{(p)}(x)$.

Вопрос **устойчивости цикла** сводится к вопросу устойчивости неподвижных точек отображения $f^{(p)}(x)$, которые составляют цикл длины p .

Цикл ДДС II

Циклом длины p ДДС (p -периодическим решением ДДС) называется множество состояний ДДС x_1, \dots, x_p таких, что

$$x_2 = f(x_1), \dots, x_p = f(x_{p-1}), x_1 = f(x_p)$$

Имеем, что $x_1 = f(x_p) = f^{(2)}(x_{p-1}) = \dots = f^{(p)}(x_1)$, т.е.

x_1 — неподвижная точка отображения $f^{(p)}(x)$, где

$f^{(p)}(x)$ — это p -ая композиция отображения $f(x)$

Неподвижные точки ДДС можно рассматривать как циклы длины 1.

Отметим, что неподвижные точки ДДС также являются неподвижными точками отображения $f^{(p)}(x)$. Поэтому из множества неподвижных точек отображения $f^{(p)}(x)$ необходимо исключать неподвижные точки циклов длины $< p$.

Циклы в модели экспоненциального роста

Рассмотрим **модель экспоненциального роста**

$$x_{n+1} = kx_n, \quad x_n \in \mathbb{R}$$

где $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Неподвижные точки: $x^* = \begin{cases} 0, & k \neq 1 \\ \mathbb{R}, & k = 1 \end{cases}$

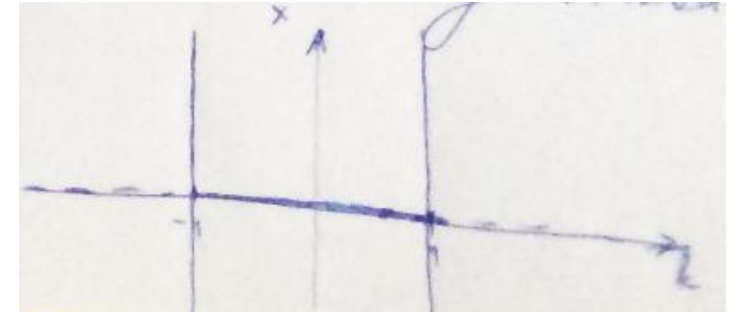
$f^{(2)}(x) = k^2x$, неподвижные точки $f^{(2)}(x)$: $x^* = \begin{cases} 0, & k \neq 1 \\ \mathbb{R}, & k = 1 \\ \mathbb{R}, & k = -1 \end{cases}$

Убираем неподвижные точки ДДС. Остается $x^* = \mathbb{R}$, при $k = -1$.

Имеем цикл длины 2: $(x^*, -x^*)$

Исследуем цикл на устойчивость. Вычисляем собственное значение $(f^{(2)})'(x^*) = k^2|_{k=-1} = 1$.
Нужно дополнительное исследование.

При $k = -1$ решение для ДДС $x_{n+1} = f^{(2)}(x_n)$ имеет вид x_0, x_0, x_0, \dots , следовательно $\forall x_0$ вблизи x^* решение останется в окрестности x^* . x^* — устойчивая неподвижная точка (не асимптотически)



Дискретная логистическая модель I

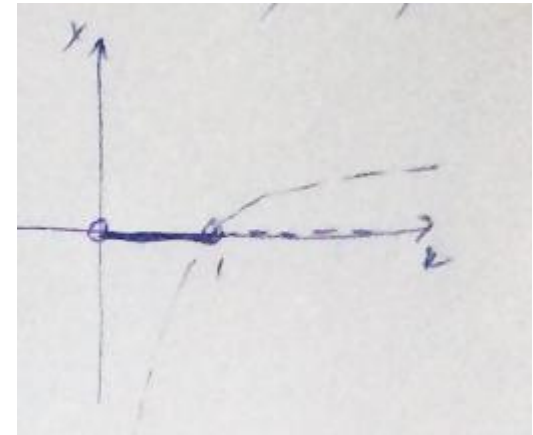
Рассмотрим **дискретную логистическую модель**

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n), \quad x_n \in \mathbb{R}$$

где $f(x) = kx(1 - x)$, $0 < k \leq 4$. Неподвижные точки определяются из решения уравнения $x = kx(1 - x)$ или $x(1 - k(1 - x)) = 0$

$$x^* = \begin{cases} 0, & 0 < k \leq 4 \\ 1 - \frac{1}{k}, & 0 < k \leq 4 \end{cases}$$

Собственное значение ДДС: $f'(x^*) = k - 2kx^*$



Рассмотрим неподвижную точку $x^* = 0$, $f'(0) = k$

неподвижная точка $x^* = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{асимптотически устойчивая при } 0 < k < 1 \\ \text{неустойчивая при } 1 < k < 4 \\ k = 1 - \text{первое бифуркационное значение параметра} \end{array} \right.$

Дискретная логистическая модель II

Рассмотрим дискретную логистическую модель

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n), \quad x_n \in \mathbb{R}$$

где $f(x) = kx(1 - x)$, $0 < k \leq 4$. Неподвижные точки:

$$x^* = \begin{cases} 0, & 0 < k \leq 4 \\ 1 - \frac{1}{k}, & 0 < k \leq 4 \end{cases}$$

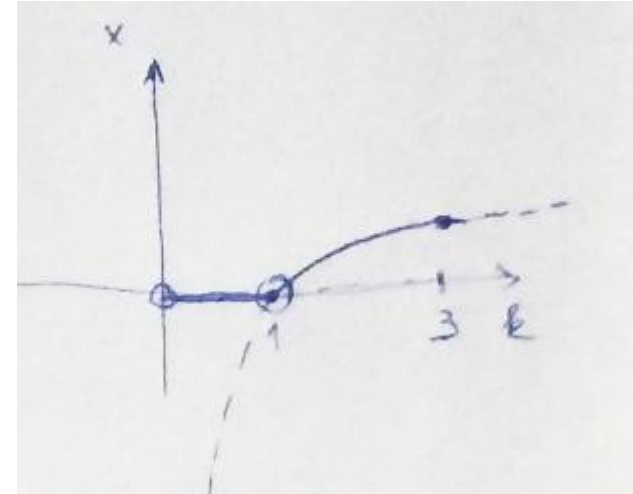
Собственное значение ДДС: $f'(x^*) = k - 2kx^*$

Рассмотрим неподвижную точку $x^* = 1 - \frac{1}{k}$,

$$f'\left(1 - \frac{1}{k}\right) = k - 2k\left(1 - \frac{1}{k}\right) = k - 2k + 2 = 2 - k$$

неподвижная точка $x^* = 1 - \frac{1}{k}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{асимптотически устойчивая при } 1 < k < 3 \\ \text{неустойчивая при } 3 < k < 4 \\ k = 1 \text{ — первое бифуркационное значение параметра} \\ k = 3 \text{ — первое бифуркационное значение параметра} \end{array} \right.$

Имеем, что при $k = 1$ возникает переход от устойчивой неподвижной точки $x^* = 0$ к устойчивой подвижной точке $x^* = 1 - \frac{1}{k}$. $k = 1$ называется **точкой транскритической бифуркации**



Дискретная логистическая модель III

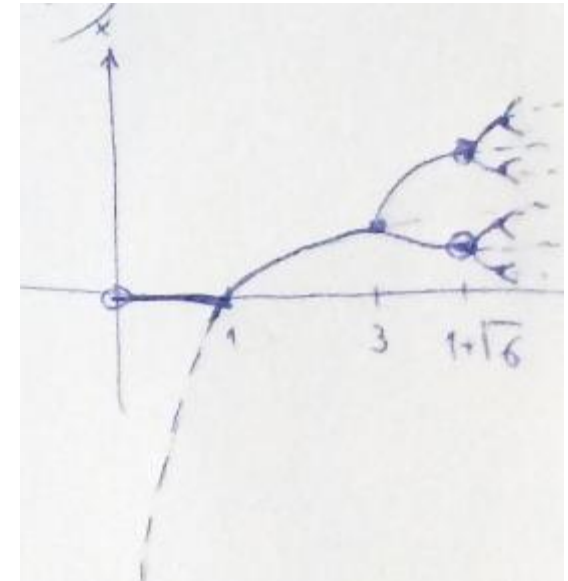
Можно показать, что вторая композиция для отображения логистической модели $f^{(2)}(x)$ имеет две неподвижные точки, которые являются устойчивыми при $3 < k < 1 + \sqrt{6}$

$k = 3$ – точка транскритической бифуркации.

В точке бифуркации $k = 1 + \sqrt{6}$ возникает цикл периода 4, который является устойчивым на некотором интервале и т.д.

Образуется иерархия решений с циклами длины 2^s и соответствующий каждому из них параметрический интервал (k_s, k_{s+1}) на котором периодическое решение устойчивое.

Точки бифуркации $k_0 = 1, k_1 = 3, k_2 = 1 + \sqrt{6}, \dots$ образуют сходящуюся последовательность к некоторому значению $k^* \approx 3.569946$.



Каскад удвоения периода

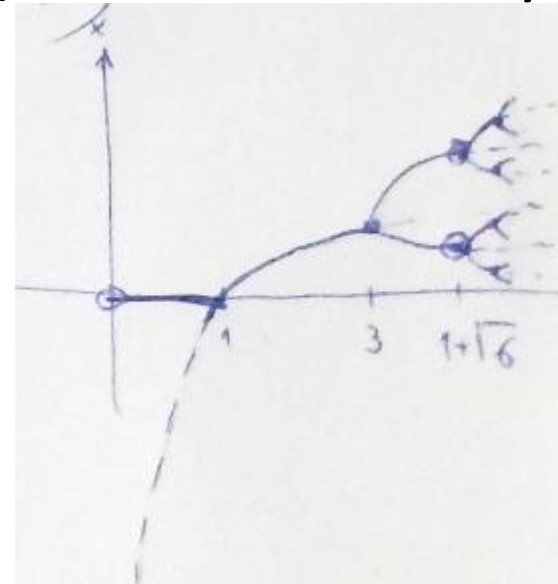
Точки бифуркации $k_0 = 1, k_1 = 3, k_2 = 1 + \sqrt{6}, \dots$ образуют сходящуюся последовательность к некоторому $k^* \approx 3.569946$.

При $k > k^*$ все решения являются непериодическими и демонстрируют хаотическое поведение.

Непериодический процесс возникает как предел формирования все более сложных структур циклов длины 2^s при $s \rightarrow \infty$.

Явление **каскада удвоения периода** при переходе к хаотическому поведению наблюдается для многих физических процессов.

Важно отметить, что одномерные ДДС являются простейшими детерминированными моделями (закон изменения во времени однозначно определен), демонстрирующими хаотическое поведение



Бифуркационная диаграмма Фейгенбаума

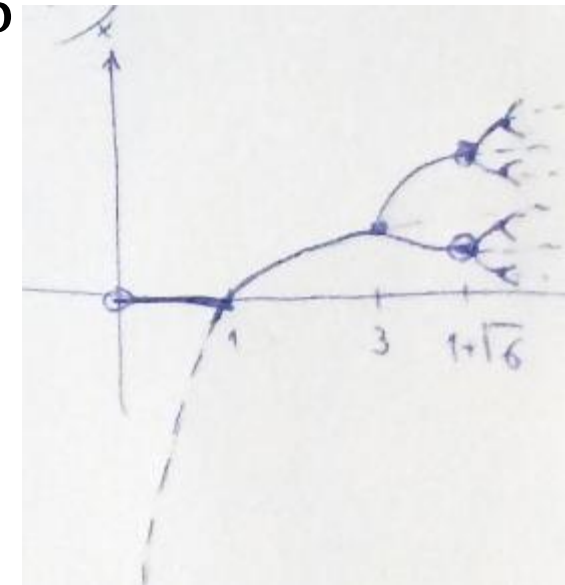
Бифуркационная диаграмма для дискретной логистической модели впервые построена в конце 70-х годов прошлого столетия американским ученым **Фейгенбаумом**.

Доказано, что длины промежутков устойчивости убывают в геометрической прогрессии [1978]

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_s - k_{s-1}}{k_{s+1} - k_s} = \mu_F \approx 4.6692016$$

μ_F -- **универсальная константа Фейгенбаума**.

Такое поведение наблюдается во многих процессах, которые демонстрируют каскад удвоения периода.



Дискретная логистическая модель

Дискретная логистическая модель, как пример простой нелинейной системы, имеет 4 типа качественного поведения в зависимости от значения параметра:

- численность вымирает
- численность стабилизируется на некоторой величине
- численность имеет периодические колебания
- численность меняется хаотически

Важно отметить, что эффект случайного/хаотического поведения может быть естественным механизмом динамики популяции, а не результатом влияния внешних факторов (среда, климат).

