Математическое моделирование динамических процессов I

Дисциплина для студентов специальности
«Компьютерная математика и системный анализ»

доц. Лаврова О.А.

механико-математический факультет, БГУ, Минск

2023

Тема 2. Математические модели колебательных явлений
Часть 2

Математический маятник является объектом моделирования в Теме 2**,**

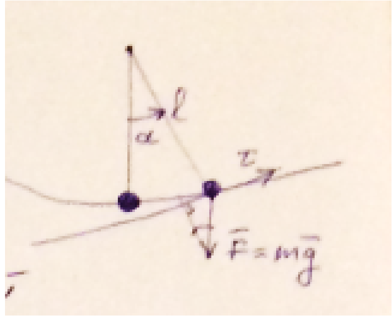
как пример **механической системы**, совершающей колебания

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Качественный анализ нелинейной динамической системы
4. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
5. Математическая модель
6. Качественный анализ нелинейной динамической системы
7. Структурная неустойчивость

Концептуальная постановка задачи I

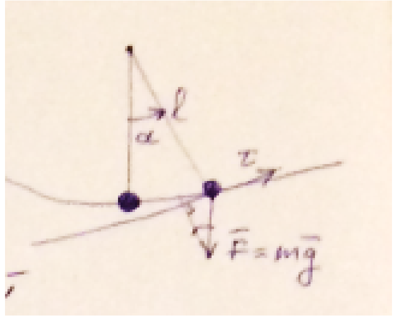
Математический маятник – это физическое тело массы m, которое подвешено на конце невесомого и нерастяжимого легкого стержня длины ℓ к неподвижной опоре



Допущение 1: тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной стержня, поэтому принимаем его за ***материальную точку***

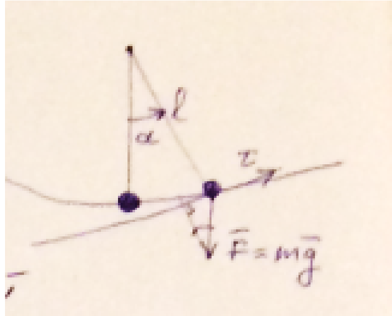
Концептуальная постановка задачи II

Тело качается в фиксированной вертикальной плоскости. Обозначим через $\alpha(t)$ угол отклонения от вертикального положения равновесия $\alpha = 0$. Будем считать, что $\alpha(t) > 0$ при отклонении против часовой стрелки.



Концептуальная постановка задачи III

Тело находится под действием силы тяжести



$$\overline{\boldsymbol{F}} = m\,\overline{\boldsymbol{g}}$$

где $\overline{\boldsymbol{g}}$ -- вектор ускорения свободного падения.

Допущение 2: силой сопротивления среды пренебрегаем, т.е. тело движется ***без трения*** .

Важно отметить, что допущение об отсутствии трения справедливо только для небольших промежутков времени моделирования.

Полагая, что в некоторый момент времени $t = 0$ стержень отклонился на угол α_0 и телу сообщили скорость v_0, требуется определить угол отклонения стержня $\alpha(t)$ как функцию времени.

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Уравнение математического маятника
4. Качественный анализ нелинейной динамической системы
5. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
6. Математическая модель
7. Качественный анализ нелинейной динамической системы
8. Структурная неустойчивость

Математическая модель

Рассмотрим три способа построения *детерминированной* математической модели

1. на основании второго закона Ньютона
2. на основании закона сохранения энергии (это возможно, так как сделано допущение, что тело движется без трения)
3. на основании вариационного принципа наименьшего действия

Важно отметить, что различные способы построения должны привести к одинаковым математическим моделям

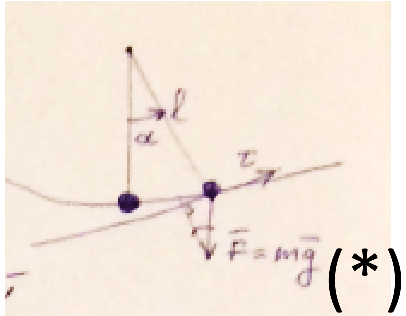
Второй закон Ньютона I

Второй закон Ньютона

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F},$$

где m – масса тела, $\boldsymbol{a}$ – ускорение, $\boldsymbol{F}$ – сила, действующая на тело. Рассмотрим проекцию на направление касательного вектора к траектории движения $ma_\tau = F_\tau$.

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = [s = \ell\alpha] = \ell\frac{d^2\alpha}{dt^2}, F_\tau = -mg\sin\alpha \Longrightarrow$$



$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin(\alpha) = 0 \qquad (*)$$

Уравнение (*) называется **уравнением свободных колебаний математического маятника.** Уравнение определяется двумя параметрами: ускорением свободного падения $g = const > 0$ и длиной стержня $\ell \ = const > 0$

Второй закон Ньютона II

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin(\alpha) = 0 \qquad (*)$$

Обобщение (из предыдущей лекции): уравнение вида

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -f(r) - \mu(r)\frac{dr}{dt}$$

рассматривается как **основное уравнение нелинейной механики**, где $-f(r)$ – восстанавливающая сила, $-\mu(r)\frac{dr}{dt}$ – демпфирующая сила

Уравнение (*) можно интерпретировать, как уравнение, описывающее прямолинейное движение тела единичной массы без трения под действием восстанавливающей силы $\boldsymbol{-f(r) = -\frac{g}{\ell}sin(\alpha)}$

Закон сохранения энергии I

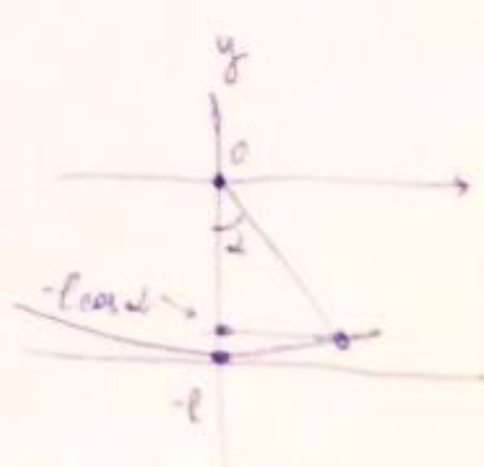
При отсутствии трения полная механическая энергия E сохраняет значение во времени, т.е.

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

В этом случае механическую систему называют ***консервативной***.

Закон сохранения энергии II

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\left(\frac{mv^2}{2} + \left(-\int_{-\ell}^{-\ell\cos\alpha} -mg\,dy\right)\right)}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow$$



$$\frac{d\left(\frac{m\ell^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}{2} + mg\ell(1 - \cos\alpha)\right)}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\ell^2}{2} 2 \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + g\ell \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin(\alpha) = 0.$$

Вариационный принцип I

Вариационный принцип наименьшего действия может быть записан в форме Лагранжа, Якоби или Гамильтона.

Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона: из всех допустимых траекторий движения механической системы между моментами времени t_1 и t_2 выбирается движение, доставляющее минимум функционалу действия

$$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{\alpha}] := \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt}\,,$$

где $L(\alpha, \alpha')$ -- функция Лагранжа для механической системы.

В простейшем случае функция Лагранжа определяется разностью кинетической и потенциальной энергий $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}') = \boldsymbol{E_k} - \boldsymbol{E_p}$.

Принцип Гамильтона принимает вид

$$\left.\left(\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d\varepsilon}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\varepsilon\varphi}(\boldsymbol{t}))\right)\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0},$$

где $\varphi(t)$ – пробная функция такая, что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$; $\alpha(t) + \varepsilon\varphi(t)$ – вариация произвольного движения, при этом $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ не зависят от ε.

Вариационный принцип II

... движение, доставляющее минимум функционалу действия

Функция Лагранжа $L\left(\alpha, \frac{d\alpha}{dt}\right) = E_k - E_n = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + mgl\cos(\alpha)$

$\forall \varphi : \varphi(t_1)=\varphi(t_2)=0, \quad S(\alpha+\varepsilon\varphi) = ml\int_{t_1}^{t_2} \frac{l}{2}\left(\frac{d(\alpha+\varepsilon\varphi)}{dt}\right)^2 + g\cos(\alpha+\varepsilon\varphi)\,)dt$

$$\frac{d}{d\varepsilon}S(\alpha+\varepsilon\varphi) = ml\int_{t_1}^{t_2}\left(l\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + l\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} - g\sin(\alpha+\varepsilon\varphi)\varphi\right)dt$$

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}S(\alpha+\varepsilon\varphi)\right|_{\varepsilon=0} = ml\int_{t_1}^{t_2}\left(l\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - g\sin(\alpha)\varphi\right)dt = \left[\begin{matrix}\text{применим к первому}\\ \text{слагаемому ф-лу интегр. по частям}\end{matrix}\right]$$

$$= ml\left(-\int_{t_1}^{t} l\frac{d^2\alpha}{dt^2}\varphi dt + \underbrace{\left. l\frac{d\alpha}{dt}\varphi\right|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} g\sin(\alpha)\varphi dt\right)$$

Согласно принципу Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(l\frac{d^2\alpha}{dt^2}\varphi + g\sin(\varphi)\varphi\right)dt = 0 \qquad \forall\varphi : \varphi(t_1)=\varphi(t_2)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\alpha) = 0$$

... (α) не интегрируется в элементарных функциях.

Уравнение математического маятника

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin(\alpha) = 0 \qquad (*)$$

Уравнение (*) не интегрируется в элементарных функциях. Аналитическое решение уравнения (*) выражается через эллиптические функции

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Качественный анализ нелинейной динамической системы
4. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
5. Математическая модель
6. Качественный анализ нелинейной динамической системы
7. Структурная неустойчивость

Качественный анализ нелинейной ДС I

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin(\alpha) = 0 \qquad (*)$$

Запишем уравнение (*) в виде динамической системы относительно двух неизвестных: угла поворота α и угловой скорости ω

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \omega, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{g}{\ell}\sin(\alpha). \end{cases}$$

Положения равновесия: $\omega = 0, \alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Качественный анализ нелинейной ДС II

В качестве фазового пространства рассмотрим координатную плоскость (α, ω). Фазовая плоскость содержит бесконечное число особых точек вида $(\pi n, 0), n \in \mathbb{Z}$.

Для построения дифференциального уравнения фазовых траекторий разделим уравнение $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{\ell}\sin(\alpha)$ на уравнение $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$. Имеем

$$\omega\, d\omega = -\frac{g}{\ell}\sin(\alpha)\, d\alpha \quad \Longrightarrow \quad \frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{\ell}\cos(\alpha) + const.$$

Качественный анализ нелинейной ДС III

Уравнение фазовых траекторий динамической системы «математический маятник»

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{\ell}\cos(\alpha) + const\ ,$$

где $-\frac{g}{\ell} \leq const$.

Качественное описание поведения математического маятника:

1. При определенных начальных условиях фазовые траектории будут замкнутыми. Для консервативных систем это соответствует **незатухающим колебаниям** вокруг положения равновесия. $-\frac{g}{\ell} \leq const < \frac{g}{\ell}$
2. При определенных начальных условиях фазовые траектории будут волнистыми линиям. Это соответствует **вращательному движению** маятника. $const > \frac{g}{\ell}$
3. Существует фазовая траектория, которая разделяет два типа движения (*сепаратриса*). Движение по *сепаратрисе* соответствует **падению** тела из положения равновесия $\alpha_0 = \pi$ с нулевой начальной скоростью $\omega_0 = 0$. Из дифференциального уравнения фазовых траекторий получаем, что $const = \frac{g}{\ell}$.

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%BC%D0%B0%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA

Двухвидовая система «хищник-жертва»
(predator-prey)
является объектом моделирования в Теме 2,

как пример **биологической системы**,
совершающей колебания

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Уравнение математического маятника
4. Качественный анализ нелинейной динамической системы
5. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
6. Математическая модель
7. Качественный анализ нелинейной динамической системы
8. Структурная неустойчивость

Концептуальная постановка задачи I

Допущение 1: в изолированной неизменной среде обитания живут популяции двух биологических видов: хищники (predator) и жертвы (prey).

Хищники питаются жертвами. Жертвы питаются продуктами среды, имеющимися в достаточном количестве.

Количественный характер борьбы за существование проявляется в виде изменений численности индивидуумов разных популяций.

Полагаем, что численность популяций хищников $M = M(t) \geq 0$ и жертв $N = N(t) \geq 0$ зависят только от времени.

Концептуальная постановка задачи II

Допущение 2: при отсутствии взаимодействия между видами численности хищников и жертв изменяются согласно ***модели Мальтуса***:

при отсутствии жертв смертность хищников доминирует над рождаемостью; численность хищников убывает экспоненциально до 0

$$\frac{dM}{dt} = -\beta M, \qquad \beta = const > 0$$

при отсутствии хищников рождаемость жертв доминирует над смертностью; численность жертв растет экспоненциально

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \qquad \alpha = const > 0$$

Концептуальная постановка задачи III

Допущение 3: вероятность взаимодействия двух видов пропорциональна как численности хищников M, так и численности жертв N, т.е.

$$\frac{dM}{dt} \sim MN \text{ и } \frac{dN}{dt} \sim MN.$$

Каждый акт взаимодействия увеличивает численность хищников и уменьшает численность жертв, т.е.

$$\frac{dM}{dt} \sim dNM \text{ и } \frac{dN}{dt} \sim -cNM.$$

где $c, d = const > 0$.

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Уравнение математического маятника
4. Качественный анализ нелинейной динамической системы
5. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
6. Математическая модель
7. Качественный анализ нелинейной динамической системы
8. Структурная неустойчивость

Математическая модель I

Приходим к математической модели для описания численности двух видов в виде нелинейной динамической системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = -\beta M + dMN, \\ \dfrac{dN}{dt} = \quad \alpha N - cMN, \end{cases} \qquad (**)$$

где $\alpha, \beta, c, d = const > 0$.

Система (**) называется **система Лотки-Вольте́рра** или **модель «хищник-жертва».** Это одна из наиболее известных моделей в теории популяций.

Математическая модель II

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = -\beta M + dMN, \\ \dfrac{dN}{dt} = \quad \alpha N - cMN, \end{cases} \qquad (**)$$

где $\alpha, \beta, c, d = const > 0$.

Модель была построена ***Лотка*** (американский химик, математик) в 1920 году для описания химической реакции с периодическим изменением концентрации двух веществ

Модель была построена ***Вольтерра*** (итальянский математик, основатель математической теории популяций) в 1926 году для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Уравнение математического маятника
4. Качественный анализ нелинейной динамической системы
5. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
6. Математическая модель
7. Качественный анализ нелинейной динамической системы
8. Структурная неустойчивость

Анализ нелинейной ДС I

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\beta M + dMN, \\ \frac{dN}{dt} = \quad \alpha N - cMN. \end{cases} \qquad (**)$$

Положения равновесия ДС (**) определяются из решения системы уравнений

$$\begin{cases} M(-\beta + dN) = 0 \\ N(\alpha - cM) = 0 \end{cases}$$

Имеем два положения равновесия

$$M^* = 0, N^* = 0 \text{ и } M^* = \frac{\alpha}{c}, N^* = \frac{\beta}{d}.$$

Анализ нелинейной ДС II

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = -\beta M + dMN, \\ \dfrac{dN}{dt} = \quad \alpha N - cMN. \end{cases} \qquad (**)$$

Рассмотрим особую точку $N^* = 0, M^* = 0$ и исследуем ее устойчивость **методом линеаризации** в окрестности особой точки

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \approx A\boldsymbol{x}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = (M, N),$$

$$\lambda_1 = -\beta, \lambda_2 = \alpha \Longrightarrow$$

Положение равновесия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ является **седлом**. Седло всегда неустойчивое, следовательно вымирание обоих видов маловероятно.

Анализ нелинейной ДС III

Рассмотрим особую точку $M^* = \frac{\alpha}{c}, N^* = \frac{\beta}{d}$ и исследуем ее устойчивость **методом линеаризации** в окрестности особой точки

Сделаем замену переменных $\tilde{N} = N - \frac{\beta}{d}$, $\tilde{M} = M - \frac{\alpha}{c}$

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(\alpha - cM) \\ \frac{dM}{dt} = M(-\beta + dN) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\tilde{N}}{dt} = \left(\tilde{N} + \frac{\beta}{d}\right)(-c\tilde{M}) \\ \frac{d\tilde{M}}{dt} = \left(\tilde{M} + \frac{\alpha}{c}\right) d\tilde{N} \end{cases} \xRightarrow{\text{линеар}} \begin{cases} \frac{d\tilde{N}}{dt} \approx -\frac{c\beta}{d}\tilde{M} \\ \frac{d\tilde{M}}{dt} \approx \frac{\alpha d}{c}\tilde{N} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c\beta}{d} \\ \frac{\alpha d}{c} & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 + \alpha\beta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\beta}$$

т.к. $Re\,\lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow$ метод линеаризации не работает, т.е. по линейному приближению нельзя исследовать тип особой точки и ее устойчивость.

Анализ нелинейной ДС IV

Построим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dN}{dM} = \frac{N(\alpha - cM)}{M(-\beta + dN)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dN(-\beta + dN)}{N} = \frac{dM(\alpha - cM)}{M} \Longrightarrow$$

$$-\beta \ln(N) + dN = \alpha \ln(M) - cM + const, \qquad M > 0, N > 0$$

$$M^{\alpha} N^{\beta} e^{-cM-dN} = const$$

На фазовом портрете можно увидеть, что в окрестности нетривиального положения равновесия система совершает **незатухающие колебания**. При этом максимум жертв не совпадает с максимумом хищников, т.е. колебания в популяциях происходят в разных фазах.

Содержание Темы 2 (Часть 2)

1. Концептуальная постановка задачи для **математического маятника**
2. Построение математической модели
3. Уравнение математического маятника
4. Качественный анализ нелинейной динамической системы
5. Концептуальная постановка задачи для модели **«хищник-жертва»**
6. Математическая модель
7. Качественный анализ нелинейной динамической системы
8. Структурная неустойчивость

Структурная неустойчивость I

Система Лотки-Вольтерра (**) является **структурно неустойчивой**: при малом изменении модели, когда к правым частям добавляются малые члены (например, за счет миграции популяции или деятельности человека), то вывод о периодичности решения становится некорректным, так как качественное поведение системы изменяется

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = -\beta M + dMN + \varepsilon f_2(M,N), \\ \dfrac{dN}{dt} = \quad \alpha N - cMN + \varepsilon f_1(M,N), \end{cases}$$

где $\varepsilon \ll 1$.

Структурная неустойчивость II

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = -\beta M + dMN, \\ \dfrac{dN}{dt} = \quad \alpha N - cMN. \end{cases} \qquad (**)$$

В силу структурной неустойчивости система Лотки-Вольтерра (**) *редко применяется в реальности* для описания взаимодействия популяций, так как количественные оценки модели могут не согласовываться с реальными данными.

Существуют многочисленные модификации модели (**), в том числе приводящие к структурно устойчивым системам.