

Математическое моделирование динамических процессов I

Дисциплина для студентов специальности
«Компьютерная математика и системный анализ»

доц. Лаврова О.А.

механико-математический факультет, БГУ, Минск

2023

Тема 2. Математические модели колебательных явлений

Колебания

Колебания – это периодические изменения во времени некоторых характеристик объектов моделирования

Колебания могут быть различной природы:

- *механические колебания*
- колебания в электрических цепях
- *химические колебания*
- *биологические колебания*
- географические колебания и т.д.

Пружинный осциллятор является объектом
моделирования в Теме 2,

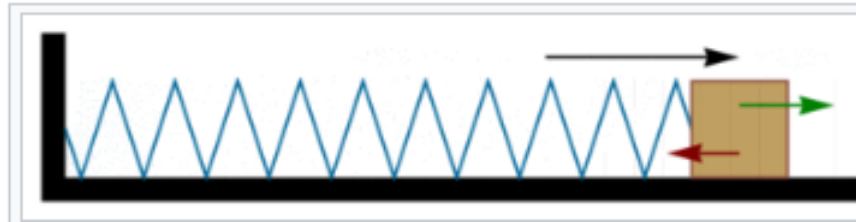
как пример **механической системы**,
совершающей колебания

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
3. Уравнение гармонического осциллятора
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Концептуальная постановка задачи I

Пружинный осциллятор – это физическое тело массы m , которое находится на одном конце пружины, второй конец пружины жестко закреплен.

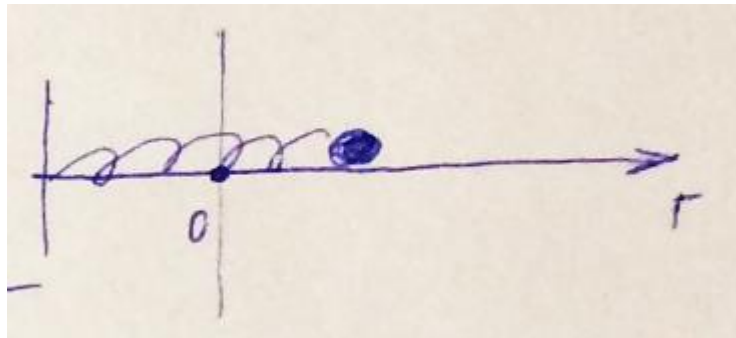


<https://ru.wikipedia.org/wiki/...>

Допущение 1: тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной пружины, поэтому принимаем его за **материальную точку**

Концептуальная постановка задачи II

Тело движется вперед или назад по горизонтальной поверхности. Обозначим через $r(t)$ координату тела вдоль оси пружины относительно положения равновесия $r = 0$, когда пружина не сжата и не растянута. Будем считать, что $r(t) > 0$, когда пружина растянута и $r(t) < 0$, когда она сжата.



Концептуальная постановка задачи III

Допущение 2: тело находится под действием силы упругости пружины. Сила упругости описывается **законом Гука**

$$F = -k r,$$

где жесткость пружины или коэффициент упругости $k = \text{const} > 0$. Сила упругости направлена в сторону уменьшения деформации, поэтому знак «минус».

Важно отметить, что закон Гука является экспериментальным и справедлив только при небольших отклонениях пружины от ее положения равновесия.

Концептуальная постановка задачи IV

Допущение 3: пружинный осциллятор движется **без трения**.

Важно отметить, что допущение об отсутствии трения справедливо только для небольших промежутков времени моделирования.

Полагая, что в некоторый момент времени $t = 0$ пружину растянули на величину r_0 и сообщили телу скорость v_0 , требуется определить координату тела $r(t)$ как функцию времени.

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для пружинного осциллятора
- 2. Построение математической модели**
3. Уравнение гармонического осциллятора
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Математическая модель

Рассмотрим три способа построения *детерминированной* математической модели

1. на основании второго закона Ньютона
2. на основании закона сохранения энергии (это возможно, так как сделано допущение, что тело движется без трения)
3. на основании вариационного принципа наименьшего действия

Важно отметить, что различные способы построения должны привести к одинаковым математическим моделям

Второй закон Ньютона

На основании второго закона Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

где m – масса тела, $\mathbf{a}$ – ускорение, $\mathbf{F}$ – сила, действующая на тело, имеем

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr. \quad (*)$$

Дифференциальное уравнение (*) называется **уравнением пружинного осциллятора**.

Уравнение пружинного осциллятора (*) определяется двумя параметрами: массой тела $m = \text{const} > 0$ и коэффициентом упругости $k = \text{const} > 0$.

Закон сохранения энергии I

При отсутствии трения полная механическая энергия E сохраняет свое значение во времени, т.е.

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

В этом случае механическую систему называют ***консервативной***.

Закон сохранения энергии II

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} = 0 &\Rightarrow \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\left(\frac{mv^2}{2} + \left(-\int_0^r F dr\right)\right)}{dt} = 0 \Rightarrow \\ \frac{d\left(\frac{m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{2} + \frac{kr^2}{2}\right)}{dt} = 0 &\Rightarrow \frac{m}{2} 2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{k}{2} 2r \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$m \frac{d^2r}{dt^2} + kr = 0.$$

Вариационный принцип I

Вариационный принцип наименьшего действия может быть записан в форме Лагранжа, Якоби или Гамильтона.

Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона: из всех допустимых траекторий движения $r(t)$ механической системы между моментами времени t_1 и t_2 выбирается движение, доставляющее минимум функционалу действия $S(r)$

$$S(r) := \int_{t_1}^{t_2} L(r(t), r'(t)) dt,$$

где $L(r, r')$ -- функция Лагранжа для исследуемой механической системы.

В простейшем случае функция Лагранжа определяется разностью кинетической и потенциальной энергий $L(r, r') = E_k - E_p$.

Принцип Гамильтона нахождения минимума функционала действия принимает вид

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} S(r(t) + \varepsilon \varphi(t)) \right) \bigg|_{\varepsilon=0} = 0,$$

где $\varphi(t)$ – произвольная функция такая, что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$; $r(t) + \varepsilon \varphi(t)$ называется вариацией произвольного движения, при этом $r(t)$ и $\varphi(t)$ не зависят от $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Вариационный принцип II

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} S(r(t) + \varepsilon \varphi(t)) \right) \bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

$S(r + \varepsilon \varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d(r + \varepsilon \varphi)}{dt} \right)^2 - \frac{k}{2} (r + \varepsilon \varphi)^2 \right] dt$
 $\frac{d}{d\varepsilon} S(r + \varepsilon \varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left(\frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) - k(r\varphi + \varepsilon \varphi^2) \right] dt$
 $\frac{d}{d\varepsilon} S(r + \varepsilon \varphi) \big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(m \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - k r \varphi \right) dt = \left[\text{применение л. и правых частей по частям} \right]$
 $= - \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d^2 r}{dt^2} \varphi + m \frac{dr}{dt} \varphi \bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} k r dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left(m \frac{d^2 r}{dt^2} + k r \right) \varphi dt \quad \forall \varphi \Rightarrow$
 $m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k r$

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
- 3. Уравнение гармонического осциллятора**
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Уравнение гармонического осциллятора I

Рассмотрим уравнение пружинного осциллятора (*)

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr = 0.$$

Запишем его в другом виде

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega^2 r = 0, \quad (**)$$

где $\omega = \sqrt{k/m} = \text{const} > 0$.

Характеристическое уравнение для (**) имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Тогда общее решение уравнения (**) имеет вид

$$r(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

По виду решения получаем, что параметр ω определяет частоту колебаний осциллятора. Постоянные интегрирования A и B определяются из начальных условий

Уравнение (**) называют **уравнением гармонического одномерного осциллятора, уравнением гармонических колебаний, уравнением свободных колебаний** (т.к. отсутствует внешняя сила)

Это *простейшая колебательная система* с единственным параметром $\omega = \text{const} > 0$

Уравнение гармонического осциллятора II

Систему, не обязательно механическую, процессы в которой описываются уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

называют **гармоническим осциллятором**. Решение может быть записано в виде

$$x(t) = C \cos(\omega t + \varphi_0) = C \operatorname{Re}(e^{i\omega t} e^{i\varphi_0})$$

где C – амплитуда колебаний, ω – частота колебаний, φ_0 – фаза.

Амплитуда колебаний C зависит от начальных данных r_0 и v_0 , но не зависит от времени. Частота колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$ не зависит от начальных данных и называется **собственной частотой**. Период колебаний $2\pi/\omega$ не зависит от начальных данных и времени.

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
3. Уравнение гармонического осциллятора
- 4. Качественный анализ линейной динамической системы**
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Качественный анализ линейной ДС I

Введем замену переменных $v = \frac{dr}{dt}$. Тогда уравнение гармонического осциллятора примет вид $\frac{dv}{dt} = -\omega^2 r$. Сформулируем линейную ДС, соответствующую уравнению гармонического осциллятора

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, x = (r, v).$$

Положение равновесие ДС $x = \mathbf{0}$. Для исследования устойчивости положения равновесия по **теореме Ляпунова** найдем собственные значения матрицы A

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

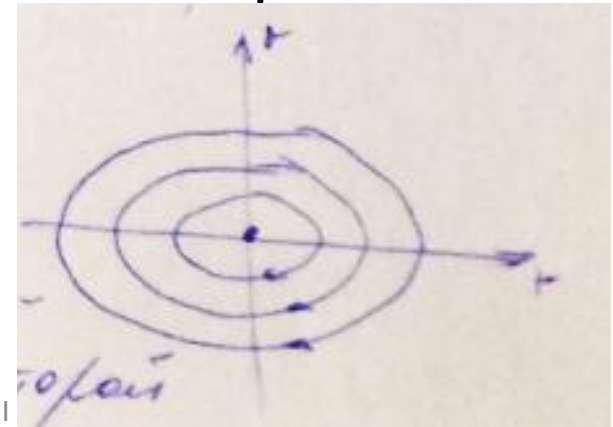
Так как собственные значения являются комплексно-сопряженными, то положение равновесия $x = \mathbf{0}$ является **центром**. Центр всегда устойчивый, но не асимптотически устойчивый.

Качественный анализ линейной ДС II

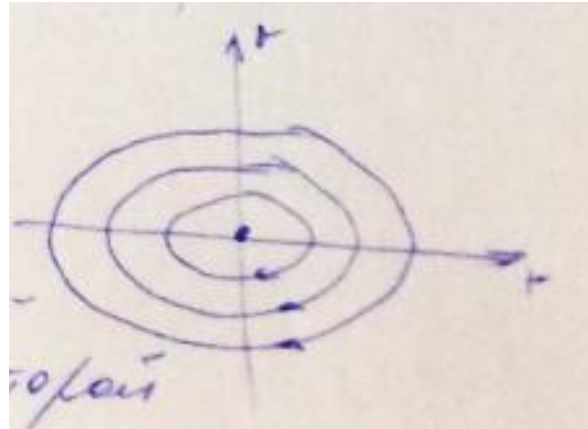
В качестве фазового пространства рассмотрим координатную плоскость (r, v) . Для построения дифференциального уравнения фазовых траекторий разделим уравнение $\frac{dv}{dt} = -\omega^2 r$ на уравнение $\frac{dr}{dt} = v$. Имеем

$$\frac{dv}{dr} = -\omega^2 \frac{r}{v} \quad \Rightarrow \quad v dv = -\omega^2 r dr \quad \Rightarrow \quad v^2 + \omega^2 r^2 = \text{const} \text{ или}$$
$$\frac{v^2}{\omega^2} + r^2 = \text{const}.$$

Фазовая плоскость заполняется вложенными друг в друга эллипсами с центрами в точке $(0,0)$. Точка $(0,0)$ является положением равновесия системы.



Качественный анализ линейной ДС III



Качественное описание поведения гармонического осциллятора: тело совершает малые колебания с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$ вблизи положения равновесия $r = 0, v = 0$ без достижения равновесия. Это процесс **незатухающих колебаний**.

Обобщение из теории ДУ: всякому периодическому движению консервативной системы соответствует движение по некоторой фиксированной траектории в фазовом пространстве, что соответствует незатухающим колебаниям системы.

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
3. Уравнение гармонического осциллятора
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. **Математическая модель с учетом силы трения**
6. Математическая модель с учетом внешней силы

Математическая модель с учетом силы трения I

Проиллюстрируем *иерархический подход к построению математической модели* для учета силы трения в модели пружинного осциллятора.

Предположим, что на тело действует сила трения, возникающая из-за сопротивления среды. В *предположении малых скоростей* движения сила трения описывается **формулой Стокса**

$$F_{\text{тр}} = -\mu \frac{dr}{dt},$$

где $\mu = \text{const} > 0$ – динамическая вязкость среды (коэффициент трения). Сила трения действует противоположно направлению вектора скорости.

Математическая модель с учетом силы трения II

С учетом силы трения уравнение пружинного осциллятора изменяется

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - \mu \frac{dr}{dt}$$

Система является неконсервативной, так как $\frac{dE}{dt} \neq 0$.

Обобщение: уравнение вида

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -f(r) - \mu(r) \frac{dr}{dt}$$

рассматривается как **основное уравнение нелинейной механики**, где $-f(r)$ – восстанавливающая сила, $-\mu(r) \frac{dr}{dt}$ – демпфирующая сила

Математическая модель с учетом силы трения III

Рассмотрим уравнение пружинного осциллятора с учетом силы трения и построим аналитическое решение

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - \mu \frac{dr}{dt}$$

Составим характеристическое уравнение $m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0$. Его

корни $\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$,

где $\gamma = \mu/2m$.

При построении аналитического решения необходимо рассмотреть три случая $\gamma < \omega$ (комплексно-сопряженные корни), $\gamma = \omega$ (кратный корень) и $\gamma > \omega$ (вещественные корни).

Математическая модель с учетом силы трения IV

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - \mu \frac{dr}{dt}$$

Соответствующая динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}, \quad x = (r, v).$$

Положение равновесие ДС $x = \mathbf{0}$. Для исследования устойчивости положения равновесия по [теореме Ляпунова](#) найдем собственные значения матрицы A

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}.$$

При анализе собственных значений необходимо рассмотреть два случая $\gamma < \omega$ (фокус), $\gamma \geq \omega$ (узел). В обоих случаях $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, следовательно положение равновесия $x = \mathbf{0}$ является абсолютно устойчивым.

Математическая модель с учетом силы трения V

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Случай 1: $\gamma < \omega$, положение равновесия $r = 0, v = 0$ устойчивый фокус

$$r(t) = e^{-\gamma t} \left(A \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right) \right)$$

Это **затухающие колебания** с экспоненциально убывающей амплитудой. Такие колебания соответствуют малому трению. Период колебаний $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$ не зависит от начальных данных.

Математическая модель с учетом силы трения VI

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Случай 2: $\gamma = \omega$, положение равновесия $r = 0$, $v = 0$ устойчивый узел

$$r(t) = e^{-\gamma t} (A + B t)$$

Это **критическое затухание**. Решение не является колеблющимся. Оно является формальным разделением колебательного и апериодического поведения.

Математическая модель с учетом силы трения VII

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Случай 3: $\gamma > \omega$, положение равновесия $r = 0$, $v = 0$ устойчивый узел

$$r(t) = e^{-\gamma t} \left(A e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + B e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} \right)$$

Это апериодическое затухание. Такие колебания соответствуют большому трению

Содержание Темы 2

1. Концептуальная постановка задачи для **пружинного осциллятора**
2. Построение математической модели
3. Уравнение гармонического осциллятора
4. Качественный анализ линейной динамической системы
5. Математическая модель с учетом силы трения
6. **Математическая модель с учетом внешней силы**

Математическая модель с учетом внешней силы I

Проиллюстрируем иерархический подход к построению математической модели для учета в модели пружинного осциллятора внешней периодической силы.

Предположим, что на тело действует внешняя сила

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_2 t),$$

где $\omega_2 = \text{const} > 0$ – **внешняя частота**.

Математическая модель вынужденных колебаний имеет вид

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F_0 \sin(\omega_2 t)$$

Математическая модель с учетом внешней силы II

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F_0 \sin(\omega_2 t)$$

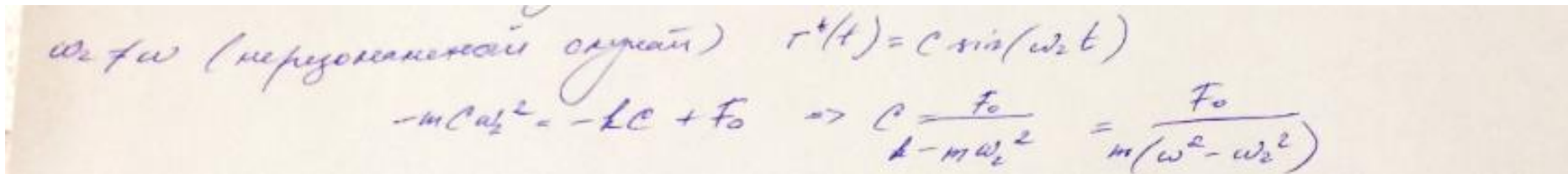
Общее решение уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения $r_0(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ и частного решения $r_*(t)$, т. е. $r(t) = r_0(t) + r_*(t)$. Другими словами общее решение является суперпозицией двух колебаний с собственной частотой ω и с вынужденной частотой ω_2 .

Для построения частного решения $r_*(t)$ необходимо рассмотреть нерезонансный случай ($\omega \neq \omega_2$) и резонансный случай ($\omega = \omega_2$). **Резонанс** – это усиление собственных колебаний под действием внешних колебаний той же частоты.

Математическая модель с учетом внешней силы III

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F_0 \sin(\omega_2 t)$$

Правая часть ДУ является действительным квазиполиномом $e^{\alpha t}(P_{m_1}(t) \cos(\beta t) + Q_{m_2}(t) \sin(\beta t))$ при $\alpha = 0, \beta = \omega_2$.



Handwritten derivation of the steady-state solution for a harmonic oscillator with external force. The text reads: $\omega_2 \neq \omega$ (нереzonансный случай) $r^*(t) = C \sin(\omega_2 t)$. Below this, the equation $-mC\omega_2^2 = -kC + F_0$ is shown, followed by the solution $C = \frac{F_0}{k - m\omega_2^2} = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_2^2)}$.

$$r_*(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_2^2)} \sin(\omega_2 t)$$

см. стр. 177—179 в [Прохорова, ОДУ, 2017]

Математическая модель с учетом внешней силы IV

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F_0 \sin(\omega_2 t)$$

$\omega_2 = \omega$ (резонансный случай) $r^*(t) = t(C_1 \sin(\omega_2 t) + C_2 \cos(\omega_2 t))$

$$\begin{aligned} \frac{dr^*}{dt} &= C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + t(C_1 \omega \cos(\omega t) - C_2 \omega \sin(\omega t)) = \\ &= \sin(\omega t)(C_1 - t\omega C_2) + \cos(\omega t)(C_2 + t\omega C_1) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 r^*}{dt^2} = \omega \cos(\omega t)(C_1 - t\omega C_2) - \sin(\omega t) \cdot \omega C_2 - \omega \sin(\omega t)(-C_2 + t\omega C_1) + \cos(\omega t) C_1 \omega$$

$$\cos(\omega t): m(2C_1 \omega - t\omega^2 C_2) = -kt C_2 \sim 2mC_1 \omega - t k C_2 = -t k C_2 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\sin(\omega t): m(-2\omega C_2 - t\omega^2 C_1) = -kt C_1 + F_0 \Rightarrow C_2 = -\frac{F_0}{2\omega m}$$

$$r_*(t) = -t \frac{F_0}{2\omega m} \cos(\omega t)$$