1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

4 Существование единственного решения вариационной задачи

5 Метод Галеркина. Пространство конечных элементов

6 Построение дискретной задачи для пространства P_1-элементов

Существует два способа построения дискретной задачи: поузловое построение и поэлементное построение. Поузловое построение основано на обходе сетки T_h, построенной в области Ω, от узла к узлу и использовании (глобальных) базисных функций $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ пространства конечных элементов V_h. Поузловое построение дискретной задачи применимо только на сетках, когда по индексу узла можно определить все элементы сетки, этот узел содержащие. Поэлементное построение основано на обходе сетки от элемента к элементу и использовании (локальных) базисных функций $\{L_i\}_{i=1}^s$ каждого конечного элемента $(T_m, \Pi_{T_m}, \Sigma_{T_m})$, построенного на элементе сетки $T_m \in T_h$. Необходимым условием реализации поэлементного подхода является построение таблицы соответствия «элемент-узлы», где для узлов задается как локальная нумерация на элементе, так и глобальная нумерация во всей расчетной области. Поэлементный подход используется в большинстве компьютерных реализаций метода конечных элементов.

Рассмотрим поэлементное построение дискретной задачи в пространстве P_1-элементов (кусочно-линейная непрерывная аппроксимация на треугольных элементах сетки по значениям в узлах сетки). Рассмотрим математическую модель в виде неоднородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области $\Omega \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= g_D(x,y) \quad (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Соответствующая ей вариационная задача, см. подраздел 4.1:

Найти $w(x,y) + u_0(x,y) \in \{u \in H^1(\Omega) \,:\, u = g_D \text{ на } \partial\Omega\}$ для $w \in H_0^1(\Omega)$ такую, что

$$a(w,v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

где

$$a(w,v) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dxdy, \quad l(v) = \int_\Omega f v dxdy - a(u_0, v),$$

функция $u_0(x,y)$ является заданной и определяется как продолжение функции $g_D(x,y)$ с границы области $\partial\Omega$ на всю область Ω.

Применение метода Галеркина к вариационной задаче приводит к дискретной задаче в виде системы линейных алгебраических уравнений, см. предыдущую тему. Элементы матрицы системы $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ вычисляются интегрированием по треугольным элементам сетки

$$\begin{aligned} A_{ij} = a(\psi_j, \psi_i) &= \int_\Omega \nabla\psi_j \cdot \nabla\psi_i dxdy = \sum_{T_m \in T_h, a_i, a_j \in T_m} \int_{T_m} \nabla\psi_j \cdot \nabla\psi_i dxdy = \sum_{T_m \in T_h, a_i, a_j \in T_m} A_{ij}^{(m)}, \\ A_{ij}^{(m)} &:= \int_{T_m} \nabla\psi_j \cdot \nabla\psi_i dxdy. \end{aligned}$$

Обозначим вершины треугольника T_m как a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3} при обходе против часовой стрелки, $T_m = \mathrm{conv}\left(\{a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}\}\right)$. Тогда для фиксированного элемента области T_m имеем, что

$$A_{ij}^{(m)} \neq 0, \quad \text{ если } i, j \in \{r_1, r_2, r_3\}, \quad A_{ij}^{(m)} = 0, \quad \text{ если } i, j \notin \{r_1, r_2, r_3\}.$$

Матрица $\hat{A}^{(m)} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, составленная из ненулевых значений $A_{r_k r_l}^{(m)}$, называется **локальной матрицей системы**

$$\hat{A}^{(m)} := \begin{pmatrix} A_{r_1r_1}^{(m)} & A_{r_1r_2}^{(m)} & A_{r_1r_3}^{(m)} \\ A_{r_2r_1}^{(m)} & A_{r_2r_2}^{(m)} & A_{r_2r_3}^{(m)} \\ A_{r_3r_1}^{(m)} & A_{r_3r_2}^{(m)} & A_{r_3r_3}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент T_m сетки T_h делает вклад в вычисление матрицы системы A следующим образом: если мы поставим соответствие между глобальной нумерацией узлов и локальной нумерацией узлов на каждом треугольнике $T_m = \mathrm{conv}\left(\{a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}\}\right) = \mathrm{conv}\left(\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3\}\right)$, тогда

$$A_{r_ir_j}^{new} = A_{r_ir_j}^{old} + \hat{A}_{ij}^{(m)}, \quad i, j = \overline{1, 3}.$$

Имеем, что каждому элементу сетки T_m соответствует изменение девяти элементов матрицы системы A для случая P_1-элементов. Построим соотношения для вычисления элементов локальной матрицы $\hat{A}^{(m)}$ с использованием локального базиса конечного элемента на T_m и перехода к типовому элементу $\hat{T}$

$$\begin{aligned} A_{r_ir_j}^{(m)} &= \int_{T_m} \nabla_\xi \psi_{r_j}(x,y) \cdot \nabla_\xi \psi_{r_i}(x,y) dxdy \overset{\text{переход к локальной нумерации}}{=} \\ &= \int_{T_m} \nabla_\xi L_j(x,y) \cdot \nabla_\xi L_i(x,y) dxdy \overset{\text{переход к типовому элементу}}{=} \\ &= \int_{\hat{T}} \nabla_\xi \left(L_j \circ F_{T_m}(\hat{\xi})\right) \cdot \nabla_\xi \left(L_i \circ F_{T_m}(\hat{\xi})\right) \left|\det B_{T_m}\right| d\hat{x}d\hat{y} \overset{L_k \circ F_{T_m}(\hat{\xi}) := \hat{L}_k(\hat{\xi})}{=} \\ &= \left|\det B_{T_m}\right| \int_{\hat{T}} \nabla_\xi \hat{L}_j(\hat{\xi}) \cdot \nabla_\xi \hat{L}_i(\hat{\xi}) d\hat{x}d\hat{y} \overset{\nabla_\xi = B_{T_m}^{-T} \nabla_{\hat{\xi}}}{=} \\ &= \left|\det B_{T_m}\right| \int_{\hat{T}} \left(B_{T_m}^{-T} \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi})\right) \cdot \left(B_{T_m}^{-T} \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi})\right) d\hat{x}d\hat{y}. \end{aligned}$$

Так как базисные функции $\{\hat{L}_i\}_{i=1}^3$ являются линейными на типовом элементе $\hat{T}$, поэтому градиент от базисной функции является константой на $\hat{T}$ и интеграл вычисляется точно

$$\begin{aligned} A_{r_ir_j}^{(m)} &= 0.5 \left|\det B_{T_m}\right| \left(B_{T_m}^{-T} \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi})\right) \cdot \left(B_{T_m}^{-T} \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi})\right) = \\ &= S(T_m) \left(\left(B_{T_m}^{-1} B_{T_m}^{-T}\right) \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi})\right) \cdot \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi}) = \\ &= \left(C^{(m)} \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi})\right) \cdot \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{(m)} &= S(T_m) \left(B_{T_m}^T B_{T_m}\right)^{-1} = S(T_m) \left(\begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right)^{-1} = S(T_m) \begin{pmatrix} b_1 \cdot b_1 & b_1 \cdot b_2 \\ b_1 \cdot b_2 & b_2 \cdot b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{S(T_m)}{\det\left(B_{T_m}\right)^2} \begin{pmatrix} b_2 \cdot b_2 & -b_1 \cdot b_2 \\ -b_1 \cdot b_2 & b_1 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4S(T_m)} \begin{pmatrix} b_2 \cdot b_2 & -b_1 \cdot b_2 \\ -b_1 \cdot b_2 & b_1 \cdot b_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_1$. Базисные функции для типового P_1-элемента определены в виде $\hat{L}_1(\hat{x},\hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}$, $\hat{L}_2(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x}$, $\hat{L}_3(\hat{x},\hat{y}) = \hat{y}$. Тогда локальная матрица системы принимает вид

$$\hat{A}^{(m)} = \begin{pmatrix} C^{(m)}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} & C^{(m)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} & C^{(m)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \\ C^{(m)}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & C^{(m)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & C^{(m)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ C^{(m)}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & C^{(m)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & C^{(m)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Поэлементный подход используется также для построения вектора правой части системы с учетом задания условия Дирихле

$$\begin{aligned} b_i &= l(\psi_i) = \int_\Omega f\psi_i dxdy - a(u_0,\psi_i) = \int_\Omega (f\psi_i - \nabla u_0\cdot\nabla\psi_i)\,dxdy \\ &= \sum_{T_m\in T_h, a_i\in T_m} \int_{T_m} (f\psi_i - \nabla u_0\cdot\nabla\psi_i)\,dxdy = \sum_{T_m\in T_h, a_i\in T_m} b_i^{(m)}, \\ b_i^{(m)} &:= \int_{T_m} (f\psi_i - \nabla u_0\cdot\nabla\psi_i)\,dxdy. \end{aligned}$$

Здесь функция $u_0(x,y)$ является продолжением функции $g_D(x,y)$ с границы области $\partial\Omega$ на всю область Ω с помощью базисных функций

$$u_0(x,y) = \sum_{j\in Id} g_D(x_j,y_j)\psi_j(x,y), \quad (x_j,y_j)\in\partial\Omega,$$

где Id обозначает множество индексов точек границы области. Пусть треугольник T_m имеет вершины a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}, обход против часовой стрелки и локальную нумерацию вершин $T_m = \operatorname{conv}(\{\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{a}_3\})$. Построим соотношение для $b_{r_i}^{(m)}$ с использованием локального базиса пространства P_1-элементов на типовом элементе

$$\begin{aligned} b_{r_i}^{(m)} &= \int_{T_m} (f\psi_{r_i} - \nabla_\xi u_0\cdot\nabla_\xi\psi_{r_i})\,dxdy \overset{\text{переход к типовому элементу}}{=} \\ &= |\det B_{T_m}|\int_{\hat{T}} \hat{f}\hat{L}_i d\hat{x}d\hat{y} - \sum_{j=1}^{3} g_D(\hat{a}_j)C^{(m)}\nabla_{\hat{\xi}}\hat{L}_j\cdot\nabla_{\hat{\xi}}\hat{L}_i \overset{\text{кубатурная формула для первого слагаемого}}{=} \\ &\approx \frac{S(T_m)}{3} f(\hat{a}_i) - \sum_{j=1}^{3} g_D(\hat{a}_j)C^{(m)}\nabla_{\hat{\xi}}\hat{L}_j\cdot\nabla_{\hat{\xi}}\hat{L}_i. \end{aligned}$$

Локальный вектор правой части для P_1-элемента $\hat{b}^{(m)}\in\mathbb{R}^3$ примет вид

$$\hat{b}^{(m)} := \begin{pmatrix} b_{r_1}^{(m)} \\ b_{r_2}^{(m)} \\ b_{r_3}^{(m)} \end{pmatrix} = \frac{S(T_m)}{3}\begin{pmatrix} f(a_{r_1}) \\ f(a_{r_2}) \\ f(a_{r_3}) \end{pmatrix} - \hat{A}^{(m)}\begin{pmatrix} g_D(a_{r_1}) \\ g_D(a_{r_2}) \\ g_D(a_{r_3}) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Аналогично построению матрицы системы имеем, что каждый элемент сетки T_m делает вклад в вычисление вектора правой части системы b следующим образом: если мы поставим соответствие между глобальной нумерацией узлов и локальной нумерацией узлов на каждом треугольнике $T_m = \operatorname{conv}(\{a_{r_1},a_{r_2},a_{r_3}\}) = \operatorname{conv}(\{\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{a}_3\})$, тогда

$$b_{r_i}^{new} = b_{r_i}^{old} + \tilde{b}_i^{(m)}, \quad i = \overline{1,3}. \tag{3}$$

6.1 Реализация условия Дирихле на основе глобального базиса

Неоднородное условие Дирихле $u(x, y) = g_D(x, y)$ на границе области $\partial\Omega$ приводит к появлению второго слагаемого в выражении для линейного функwионала

$$l(v) = \int_\Omega f v dx dy - a(u_0, v).$$

Часто на практике учет условия Дирихле в выражении для функционала $l(v)$ осуществляется на основе глобальных базисных функций без перехода к локальной матрице системы на каждом элементе области, как это получено в формуле (2). В этом случае сначала вектор правой части системы строится по формуле (3) для $g_D(x, y) = 0$. Выражение для $a(u_0, \psi_i)$ может быть представлено в следующем виде

$$a(u_0, \psi_i) = \sum_{j \in Id} g_D(x_j, y_j) a(\psi_j, \psi_i) = \sum_{j \in Id} g_D(x_j, y_j) A_{ij} \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$u_0(x, y) = \sum_{j \in Id} g_D(x_j, y_j) \psi_j(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

Id — множество индексов точек границы области. Далее вектор правой части корректируется для каждого индекса, соответствующего границе с условием Дирихле, по формуле

$$b^{new} = b^{old} - g_D(x_j, y_j) A_{*,j}, \quad j \in Id, \tag{4}$$

где $A_{*,j}$ — j-ый столбец матрицы A. При этом для точек, соответствующих границе с условием Дирихле, уравнения дискретной задачи заменяются на следующие

$$u_j = g_D(x_j, y_j), \quad j \in Id. \tag{5}$$

Возможны два способа реализации условия Дирихле по формулам (4), (5). Для демонстрации реализации воспользуемся синтаксисом Matlab.

Способ 1 (цикл по Id):

$$\begin{aligned}
& && \%\ \text{изменение вектора правой части} \\
b &=& & b - A(:, j) * g_D(x(j), y(j)); \\
b(j) &=& & g_D(x(j), y(j)); \\
& && \%\ \text{замена } j\text{-ой строки матрицы на единичный вектор} \\
A(j, :) &=& & \text{sparse}(1, j, 1, 1, n); \\
& && \%\ \text{замена } j\text{-ого столбца матрицы на единичный вектор} \\
A(:, j) &=& & \text{sparse}(j, 1, 1, n, 1).
\end{aligned}$$

Способ 2 (векторизация вычислений):

$$
\begin{aligned}
& && \text{\% определение граничных и внутренних узлов}\\
\text{BoundaryNode} &= && \text{unique}(e(1,:), e(2,:));\\
\text{InteriorNode} &= && \text{setdiff}([1:n], \text{BoundaryNode});\\
& && \text{\% изменение вектора правой части}\\
b &= && b(\text{InteriorNode}) - A(\text{InteriorNode}, \text{BoundaryNode}) * g_D;\\
& && \text{\% изменение матрицы системы}\\
A &= && A(\text{InteriorNode}, \text{InteriorNode});\\
& && \text{\% построение вектора решения}\\
u_h &= && \text{zeros}(n,1);\\
u_h(\text{BoundaryNode}) &= && g_D;\\
u_h(\text{InteriorNode}) &= && A\backslash b;
\end{aligned}
$$

6.2 Реализация граничных условий для смешанной задачи

Рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона в области $\Omega \in \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(x,y) &= f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega\\
u(x,y) &= g_D(x,y) \quad (x,y) \in \Gamma_D,\\
\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) &= g_N(x,y) \quad (x,y) \in \Gamma_N,
\end{aligned}
$$

где $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \text{meas}(\Gamma_D) > 0$. Соответствующая вариационная задача имеет следующий вид(см. подраздел 4.3):

Найти $w(x,y) + g_D(x,y) \in H^1(\Omega)$ для $w \in H_0^1(\Omega)$ такую, что

$$a(w,v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

где

$$a(w,v) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dxdy, \quad l(v) = \int_\Omega f v dxdy - a(u_0, v) + \int_{\Gamma_N} g_N v ds.$$

Функция $u_0(x,y)$ рассматривается в виде продолжения функции $g_D(x,y)$ с границы области Γ_D на всю область Ω с помощью базисных функций, т.е.

$$u_0(x,y) = \sum_{j \in Id_D} g_D(x_j, y_j)\psi_j(x,y),$$

где Id_D обозначает множество индексов точек на границе Γ_D. Линейный функционал $l(v)$ учитывает условие Дирихле на границе Γ_D во втором слагаемом и условие Неймана на границе Γ_N в третьем слагаемом. На практике сначала корректируется система линейных уравнений для учета условия Дирихле на границе Γ_D, см. раздел 6.1. Корректирующее слагаемое для учета условия Неймана в i-ом элементе вектора правой части $\int_{\Gamma_N} g_N \psi_i ds$ может быть вычислено с применением квадратурной формулы средних для случая поточечного задания функции $g_N(x,y)$ в узлах сетки. Рассмотрим пример, когда Γ_N является верхней границей единичного квадрата $(0,1)^2$. Тогда для внутренних точек границы Γ_N имеем

$$\int_{\Gamma_N} g_N \psi_i ds \approx \frac{1}{2} g_N(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_{i-1}).$$

Предположим, что $g_N(x,y) = x+1$. Для демонстрации реализации воспользуемся синтаксисом Matlab.

$$\begin{aligned}
&I_{top} = find(p(2,:) == 1);\\
&[px_{top}, ind] = sort(p(1, I_{top}));\\
&I_{top} = I_{top}(ind);\\
&g_{N,top} = px_{top} + 1;
\end{aligned}$$

Скорректируем вектор правой части для узлов верхней границы области с учетом условия Неймана

$$\begin{aligned}
&for \quad i = 1 : length(I_{top})\\
&\quad ind = I_{top}(i);\\
&\quad if(i == 1)\\
&\qquad b(ind) = b(ind) + 0.5 * g_{N,top}(i) * (px_{top}(i+1) - px_{top}(i));\\
&\quad elseif(i == length(I_{top}))\\
&\qquad b(ind) = b(ind) + 0.5 * g_{N,top}(i) * (px_{top}(i) - px_{top}(i-1));\\
&\quad else\\
&\qquad b(ind) = b(ind) + 0.5 * g_{N,top}(i) * (px_{top}(i+1) - px_{top}(i-1));\\
&\quad end;\\
&end
\end{aligned}$$

Отметим, что при совмещении граничных условий в концевых точках частей границы Γ_D и Γ_N, реализуется условие Дирихле. Это приводит к упрощению реализации

$$\begin{aligned}
&for \quad i = 2 : length(I_{top}) - 1\\
&\quad ind = I_{top}(i);\\
&\quad b(ind) = b(ind) + 0.5 * g_{N,top}(i) * (px_{top}(i+1) - px_{top}(i-1));\\
&end
\end{aligned}$$

6.3 Реализация задачи Неймана для уравнения Пуассона

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Пуассона в двумерной области Ω

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x,y) &= f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega\\
\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) &= g_N(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Функция решения краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона определяется с точностью до константы. Для построения обобщенного решения краевой задачи из функционального пространства для функции решения нужно исключить постоянные функции

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \ : \ \int_\Omega v dx dy = 0\}.$$

Это означает, что решение вариационной задачи должно дополнительно удовлетворять интегральному соотношению $\int_\Omega u dx = 0$ для неизвестной функции $u \in V$. Это реализуется с помощью метода множителей Лагранжа, который позволяет учитывать ограничения для неизвестного решения u за счет введения дополнительной неизвестной величины λ — множителя Лагранжа.

Найти $u \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy + \lambda \int_\Omega v dxdy &= \int_\Omega f v dxdy + \int_{\partial\Omega} g_N v dxdy \quad \forall v \in H^1(\Omega), \\ \int_\Omega u dxdy &= 0. \end{aligned}$$

Соответствующая дискретная задача будет иметь следующий вид

$$\begin{pmatrix} A & \Lambda \\ \Lambda^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

где вектор Λ определяется элементами $\Lambda_i = \int_{\mathrm{supp}\psi_i} \psi_i(x,y) dxdy$, $i = overline1, n$.

Задания

Задание 6.1 (практика)**.** Реализуйте алгоритма метода конечных элементов в пространстве P_1-элементов для задачи Дирихле из Задания 1.5. Сравните конечно-элементное решение с точным решением, а также с конечно-элементным решением, построенным средствами PDE Toolbox в Matlab на аналогичной сетке.

1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega = (0,1)^2 \\ u(x,y) = g_D(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

   Аналогично реализации Задания 1.5, решите задачу средствами GUI PDEToolbox для заданного точного решения $u(x,y)$ из Задания 1.2. Экспортируйте в Workspace Matlab геометрию сетки (p,e,t) и конечно-элементное решение u_{PDE}.

2. Дискретная задача представлена системой линейной алгебраических уравнений для матрицы системы A и вектора правой части b. Некоторые комментарии по построению матрицы A и вектора правой части b:

   (a) Размер матрицы A и вектора правой части b определяется количеством базисных функций конечно-элементного пространства. В случае P_1-элементов количество базисных функций совпадает с количеством узлов сетки. Определим начальные значения для A и b

$$\begin{aligned} n &= size(p,2); \\ A &= sparse(n,n); \\ b &= sparse(n,1); \end{aligned}$$

   (b) Для построения вектора правой части необходимо вычислить функцию $f(x,y)$ в каждом узле сетки. Например, для $f(x,y) = x + y$ имеем

$$\begin{aligned} x &= p(1,:); \\ y &= p(2,:); \\ f &= x + y; \end{aligned}$$

(c) Пусть переменные Am и bm определяют локальную матрицу дискретной системы и локальный вектор правой части, соответственно. Определим начальные значения переменных Am и bm

$$
\begin{aligned}
&Am = zeros(3,3);\\
&bm = zeros(3,1);
\end{aligned}
$$

(d) На каждом треугольном элементе необходимо вычислить локальную матрицу системы Am и локальный вектор правой части bm по формулам (1) и (2), соответственно. На этом этапе вычислений полагаем, что функция $g_D(x,y)$ на границе области $\partial\Omega$ равна 0.

$$
\begin{aligned}
&for \quad i = 1 : size(t,2)\\
&\quad Am = ...\\
&\quad bm = ...\\
&end
\end{aligned}
$$

(e) Каждая локальная матрица системы Am и локальный вектор правой части bm делает вклад в вычисление матрицы системы A и вектора правой части b

$$
\begin{aligned}
&for \quad i = 1 : size(t,2)\\
&\quad Am = ...\\
&\quad bm = ...\\
&\quad ind = t(1:3,i);\\
&\quad A(ind,ind) = A(ind,ind) + Am;\\
&\quad b(ind) = b(ind) + bm;\\
&end
\end{aligned}
$$

(f) Предположим, что функция $g_D(x,y)$ на левой границе равна (y), на правой границе равна $(y+1)$, на верхней границе равна $(x+1)$, на нижней границе равна (x). Тогда функция $g_D(x,y)$ на всей границе области $\partial\Omega$ может быть определена следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&Id_{left} = find(p(1,:) == 0);\\
&Id_{right} = find(p(1,:) == 1);\\
&Id_{top} = find(p(2,:) == 1);\\
&Id_{bottom} = find(p(2,:) == 0);\\
&Id = [Id_{left}, Id_{right}, Id_{top}, Id_{bottom}];\\
&g_D(Id) = [p(2,Id_{left}), p(2,Id_{right}) + 1, p(1,Id_{top}) + 1, p(1,Id_{bottom})];
\end{aligned}
$$

(g) Осуществите корректировку матрицы A и вектора правой части b с учетом функции g_D, используя Способ 1 или Способ 2, см. подраздел 6.1.

3. Решите дискретную задачу. Для этого в синтаксисе Matlab используйте операцию обратной косой черты.

$$u_h = A\backslash b;$$

4. Сравните графически решение u_h с точным решением $u(x,y)$ и решением u_{PDE}, полученным с помощью PDEToolbox.

Задание 6.2 (необязательное задание). Реализуйте алгоритма метода конечных элементов в пространстве P_1-элементов для смешанной краевой задачи, построенной для уравнения Пуассона в единичном квадрате из Задания 1.5. Особенности реализации граничных условий для смешанной задачи обсуждалось в подразделе 6.2. Сравните конечно-элементное решение с точным решением, а также с конечно-элементным решением, построенным средствами PDE Toolbox в Matlab на аналогичной сетке.

Задание 6.3 (необязательное задание). Реализуйте алгоритма метода конечных элементов в пространстве P_1-элементов для задачи Неймана, построенной для уравнения Пуассона в единичном квадрате из Задания 1.5. Для однозначной разрешимости необходимо ввести интегральное соотношение в вариационную формулировку задачи, см. подраздел 6.3. Сравните конечно-элементное решение с точным решением.

Задание 6.4 (необязательное задание). Постройте соотношения для вычисления локальной матрицы системы $\tilde{A}^{(m)} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ в случае P_2-элемента и для вычисления локального вектора правой части $\tilde{b}^{(m)} \in \mathbb{R}^6$ для P_2-элемента по аналогии с построением соответствующих соотношений для P_1-элемента.

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.