

- 1 Введение
- 2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка
- 3 Пространства Соболева
- 4 Существование единственного решения вариационной задачи
- 5 Метод Галеркина. Пространство конечных элементов

Идея численного решения краевой задачи методом конечных элементов заключается в решении соответствующей вариационной задачи, которая сформулирована в некотором пространстве Соболева V , в подходящем конечномерном подпространстве $V_h \subset V$. Выбор подпространства V_h осуществляется таким образом, чтобы при стремлении параметра дискретизации области h к нулю, численное решение $u_h \in V_h$ стремилось к обобщенному решению краевой задачи, т.е. $u_h \rightarrow u \in V$ при $h \rightarrow 0$.

Метод нахождения приближенного решения вариационной задачи за счет перехода от бесконечномерного пространства V к конечномерному подпространству $V_h \subset V$ называется **методом Галеркина**:

Найти $u_h \in V_h$ такую, что

$$a(u_h, v) = l(v) \quad \forall v \in V_h. \quad (1)$$

Вариационная задача (1), сформулированная в конечномерном пространстве $V_h \subset V$, называется **дискретной задачей**, а решение u_h называется **дискретным решением**.

Процесс решения исходной задачи методом конечных элементов может быть представлен в виде последовательности преобразований, которое приводит к приближенному решению исходной задачи: Исходная задача (описание реальной системы) $\rightarrow$ Математическая модель в виде краевой задачи $\rightarrow$ Вариационная задача $\rightarrow$ Дискретная задача.

При условии, что пространство V_h является линейным, билинейная форма $a(u, v)$ симметричной и положительной, а функционал $l(v)$ линейным, вариационная задача эквивалентна решению задачи минимизации (см. Теорема 2.2):

$$\min \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) : v \in V_h \right\}.$$

Переход от бесконечномерного пространства V к конечномерному подпространству V_h при решении задачи минимизации называется **методом Ритца** (1908).

Теорема 5.1 (аналог леммы Лакса-Мильграма для дискретной задачи). Пусть V — гильбертово пространство, билинейная форма $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ является эллиптической и непрерывной, а линейная форма $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывной, тогда дискретная задача (1), сформулированная в подпространстве $V_h \subset V$, имеет единственное решение.

Пусть задано n линейно независимых функций $\psi_1 = \psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_n = \psi_n(\mathbf{x})$ из базиса сепарабельного гильбертова пространства V . С помощью функций $\psi_j(\mathbf{x})$ можно построить n -мерное подпространство V_h пространства V как множество всех линейных комбинаций функций $\psi_j(\mathbf{x})$

$$V_h = \left\{ \sum_{j=1}^n z_j \psi_j(\mathbf{x}) : \psi_j(\mathbf{x}) \in V \text{ — линейно-независимые функции, } j = \overline{1, n}, \quad z_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

Функции $\psi_j(\mathbf{x})$ называются **базисными функциями** в пространстве V_h размерности n (или глобальными функциями формы пространства V_h в контексте метода конечных элементов).

Вариационные уравнения дискретной задачи (1) справедливы для всех функций $v_h \in V_h$. В силу свойств вариационных уравнений их достаточно удовлетворить только для базисных функций

$$a(u_h, \psi_i) = l(\psi_i) \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Представим неизвестную функцию u_h в виде разложения по заданному базису $\{\psi_j\}_{j=\overline{1, n}}$ с некоторыми коэффициентами разложения $z_j \in \mathbb{R}$

$$u_h = \sum_{j=1}^n z_j \psi_j.$$

Тогда система вариационных уравнений (2) примет вид системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для неизвестных числовых коэффициентов z_j

$$\sum_{j=1}^n a(\psi_j, \psi_i) z_j = l(\psi_i) \quad i = \overline{1, n}.$$

Это позволяет записать дискретную задачу (1) в матричном виде

$$Az = b,$$

где $A_{ij} = a(\psi_j, \psi_i)$, $b_i = l(\psi_i)$, $i, j = \overline{1, n}$. Имеем систему из n уравнений с n неизвестными z_j . Покажем, что матрица A является положительно-определенной, если билинейная форма $a(u, v)$ вариационной задачи является эллиптической ($\exists \alpha > 0$, что $a(u, u) > \alpha \|u\|_V^2$, $\forall u \in V$)

$$\begin{aligned} z^T Az &= \sum_{i,j=1}^n z_i A_{ij} z_j = \sum_{i,j=1}^n z_i a(\psi_j, \psi_i) z_j = \sum_{i,j=1}^n a(z_j \psi_j, z_i \psi_i) \\ &= a\left(\sum_{j=1}^n z_j \psi_j, \sum_{i=1}^n z_i \psi_i\right) = a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|^2 > 0. \end{aligned}$$

Из положительной определенности матрицы A следует ее обратимость и однозначная разрешимость дискретной задачи. Процесс решения дискретной задачи можно разбить на этапы:

- на основе базисных функций $\psi_j(\mathbf{x})$ пространства V_h вычислить величины A_{ij} и b_i дискретной задачи;
- найти z_j как решение системы линейных алгебраических уравнений $Az = b$;
- построить приближенное решение $u_h(\mathbf{x}) \in V_h$ в виде $u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n z_j \psi_j(\mathbf{x})$.

Идея метода конечных элементов связана со специальным выбором базисных функций. А именно, для построения метода конечных элементов в качестве базисных функций используются **финитные функции**. Финитная функция ψ_j отлична от нуля в некоторой компактной подобласти $\text{supp } \psi_j$ (носитель функции) области Ω и равна нулю на оставшейся части области Ω . Выбор финитных функций в качестве базисных является решающим для эффективности практической реализации метода конечных элементов. В этом случае матрица A является **разреженной** —

матрица с малым числом ненулевых элементов (отношение числа ненулевых элементов матрицы к общему числу элементов меньше 5 %). Действительно,

$$\begin{aligned} A_{ij} &= a(\psi_j, \psi_i) = \int_{\Omega} \sum_{l,k} a_{lk} \partial_l \psi_j \partial_k \psi_i = \sum_{l,k} \int_{\Omega} a_{lk} \partial_l \psi_j \partial_k \psi_i \\ &= \sum_{l,k} \int_{\text{supp } \psi_i \cap \text{supp } \psi_j} a_{lk} \partial_l \psi_j \partial_k \psi_i = \sum_{l,k} \int_{\bigcup_{\xi_i, \xi_j \in T} T} a_{lk} \partial_l \psi_j \partial_k \psi_i, \end{aligned}$$

где $\text{supp } \psi_j = \bigcup_{T \in T_h, \xi_j \in T} T$, $T_h = \{T_i\}_{i=1, \overline{M}}$ — множество всех элементов разбиения области Ω . С вычислительной точки зрения процесс решения СЛАУ для разреженных матриц является очень эффективным.

5.1 Пространство конечных элементов

Метод конечных элементов в его простейшей форме, это метод Галеркина, характеризуемый следующими тремя основными аспектами в построении подпространства V_h — пространства конечных элементов.

1. Разбиение области Ω на конечное число непересекающихся подобластей, которые называются элементами. Множество всех элементов обозначается $T_h = \{T_i\}_{i=1, \overline{M}}$. При этом разбиение области должно быть допустимым. Это означает, что должны выполняться следующие свойства

- (a) $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M \bar{T}_i$, где все элементы T_i являются или треугольниками (2D) или четырехугольниками (2D) или тетраэдрами (3D) или призмами (3D);
- (b) Если $\bar{T}_i \cap \bar{T}_j, i \neq j$ является точкой, тогда точка является вершиной как элемента T_i , так и элемента T_j ;
- (c) Если $\bar{T}_i \cap \bar{T}_j, i \neq j$ является множеством точек, тогда это множество является общей гранью для элементов T_i и T_j .

2. Определение носителя базисной функции ψ_j в виде объединения элементов, содержащих точку ξ_j

$$\text{supp } \psi_j = \bigcup_{T \in T_h, \xi_j \in T} T.$$

Количество точек $\xi_j \in \Omega$, на основании которых строятся базисные функции, определяет размерность пространства конечных элементов и, как следствие, размерность матрицы дискретной задачи.

3. Определение базисной функции в виде многочлена. В частности, если T — треугольник, то на каждом элементе T функция $v_h \in V_h$ является многочленом степени, меньшей либо равной k ,

$$v_h|_T \in P_k(T) := \left\{ \sum_{0 \leq i+j \leq k} c_{ij} x^i y^j \mid (x, y) \in T, c_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Если T — четырехугольник, то на каждом элементе T функция $v_h \in V_h$ является многочленом степени, меньшей либо равной k , по каждой переменной,

$$v_h|_T \in Q_k(T) := \left\{ \sum_{0 \leq i, j \leq k} c_{ij} x^i y^j \mid (x, y) \in T, c_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

При условии, что $V_h \subset V = H^m(\Omega)$, пространство конечных элементов должно обладать свойством

$$V_h \subset C^{m-1}(\bar{\Omega}).$$

Пространство конечных элементов V_h , состоящее из непрерывных функций $C^0(\bar{\Omega})$, необходимо для решения эллиптической краевой задачи второго порядка, тогда как для решения задач четвертого порядка необходимо использовать C^1 -пространство конечных элементов. При условии $V_h \subset V$ пространство конечных элементов называется конформным и метод конечных элементов называется конформным. В противном случае пространство конечных элементов называется неконформным.

Самым распространенным пространством конечных элементов на треугольной сетке является пространство линейных элементов из $C^0(\bar{\Omega})$ (пространство Куранта, пространство P_1 -элементов)

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in P_1(T), \forall T \in T_h\}.$$

По определению произвольная функция пространства V_h является линейной на каждом элементе и кусочно-непрерывной во всей области. В частности, базисные функции пространства V_h можно определить соотношением

$$\psi_j(\xi_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

где ξ_i – вершины элементов сетки. В этом случае коэффициенты z_j разложения дискретного решения $u_h(\mathbf{x})$ по базису принимают конкретный смысл $z_j = u_h(\xi_j)$.

Другие примеры пространств конечных элементов:

- пространство квадратичных треугольных элементов из $C^0(\bar{\Omega})$ или P_2 -элементов,
- пространство кубических треугольных элементов из $C^0(\bar{\Omega})$ или P_3 -элементов,
- пространство треугольных элементов Аргириса из $C^1(\bar{\Omega})$, $v|_T \in P_5(T)$,
- пространство треугольных элементов Белла из $C^1(\bar{\Omega})$, $v|_T \in P_5(T)$,
- пространство билинейных прямоугольных элементов из $C^0(\bar{\Omega})$ или Q_1 -элементов, и т.д.

На практике определение базисных функций осуществляется на основе понятия конечного элемента.

5.2 Конечный элемент

Определение 5.1 (Сьярле, 1978). **Конечный элемент** определяется тройкой (T, Π, Σ) , где

T — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^d$ с непустым множеством внутренних точек и непрерывной по Липшицу границей;

Π — конечномерное пространство вещественных функций размерности s , определенных на множестве T , такое, что $\Pi \subset C(T)$;

Σ — множество из s линейно независимых линейных функционалов $l_i : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $\forall p \in \Pi$ однозначным образом определяется значениями функционалов из Σ (свойство Π -унисольвентности). Другими словами, в конечномерном пространстве Π можно определить s базисных функций $L_i(\xi)$, что

$$\forall p \in \Pi \quad p(\xi) = \sum_{i=1}^s l_i(p) L_i(\xi), \quad \xi \in T, \quad l_i \in \Sigma.$$

Линейные функционалы $l_i \in \Sigma$, $i = \overline{1, s}$ называют **степенями свободы конечного элемента**. Множество Σ называют множеством степеней свободы. Базисные функции $L_i(\xi) \in \Pi$, $i = \overline{1, s}$ называются **функциями формы конечного элемента**.

Если множество T является d -симплексом (выпуклая оболочка множества из $d+1$ -ой линейно-независимой точки), то конечный элемент называется симплицальным (треугольным при $d = 2$, тетраэдральным при $d = 3$). Если множество степеней свободы Σ определяется значениями в точках, принадлежащих T , т.е. $l_i(p) = p(\xi_i)$, $\xi_i \in T$, тогда конечный элемент называется **лагранжевым конечным элементом**. Лагранжевы конечные элементы используются для аппроксимации пространства $H^1(\Omega)$. Другими возможностями задания степеней свободы являются задание значений производных в точках элемента T или значений интегралов по T . Если в качестве одной из степеней свободы используется значение производной, то конечный элемент называется **эрмитовым конечным элементом**. Примером является конечный элемент Аргириса, который используется для аппроксимации пространства $H^2(\Omega)$.

Пространство конечных элементов определяется разбиением области на элементы T_h и заданием конечного элемента (T, Π, Σ) одного и того же типа для всех элементов разбиения

$$V_h = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, : \quad v|_T \in \Pi(T), \quad \forall T \in T_h\}.$$

Базисные функции $\{\psi_i\}_{i=\overline{1,n}}$ пространства конечных элементов V_h строятся по функциям формы для каждого элемента $T \in T_h$. Пусть степень свободы l_a соответствует некоторой точке $a \in \Omega$. Пусть I_a обозначает индексы элементов области, которым принадлежит точка a . Пусть $L_i^a(\xi)$ для каждого $i \in I_a$ обозначает функцию формы на элементе T_i , соответствующую степени свободы l_a . Тогда базисная функция ψ_a пространства V_h , соответствующая степени свободы l_a , определяется соотношениями

$$\psi_a(\xi) = \begin{cases} L_i^a(\xi), & \text{где } \xi \in T_i, i \in I_a \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим несколько примеров задания конечных элементов.

Пример 5.1. В одномерном пространстве элементом области T для построения конечного элемента является отрезок. Пусть $T = [0, 1]$, $\Pi = P_1(T) = \text{span}\{1, x\}$ пространство линейных функций на отрезке, размерность пространства $s = 2$. Определим $\Sigma = \{l_1, l_2\}$ значениями функций $p \in \Pi$ на концах отрезка, т.е. $l_1(p) = p(0)$ и $l_2(p) = p(1)$. Тогда функции формы пространства Π определяются однозначно, как $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = x$. В общем случае, когда $T = [a, b]$, $\Pi = P_k(T)$ — пространство многочленов степени $\leq k$ с размерностью пространства $s = k + 1$, тогда множество степеней свободы $\Sigma = \{l_1, l_2, \dots, l_{k+1}\}$ можно задать как $l_i(p) = p(a + (b - a)(i - 1)/(k + 1))$, $i = \overline{1, k + 1}$.

Пример 5.2. Рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$, элементом области полагаем треугольник T . Пусть $\Pi = P_1(T) = \text{span}\{1, x, y\}$ пространство линейных функций на треугольнике с размерностью $s = 3$, Σ определяется значениями функций $p \in \Pi$ в некоторых s точках, принадлежащих треугольнику, $\Sigma = \{p(a_i) : a_i \in T, i = \overline{1, s}\}$. Различный выбор точек a_i приводит к различным типам конечных элементов.

- Если степенями свободы являются значения в вершинах треугольника (**элемент Куранта**), тогда функция $p \in \Pi$ на стороне треугольника T , общей с треугольником $\tilde{T}$, однозначно определяется значениями на концах стороны и совпадает вдоль этой стороны с функцией $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}$, определенной на треугольнике $\tilde{T}$. Таким образом, пространство P_1 -элементов будет состоять из непрерывных функций, т.е. $V_h \subset C^0(\Omega)$. Пространство P_1 -элементов является конформным, схематическое изображение P_1 -элемента представлено на Рис. 1 (Lineares Dreieckelement).
- Если степенями свободы являются значения в серединах сторон треугольника (**элемент Крузее-Равьяра**), тогда функция $p \in \Pi$ на стороне треугольника T , общей с треугольником $\tilde{T}$, неоднозначно определяется значением в средней точке и совпадает с функцией $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}$,

определенной на треугольнике $\tilde{T}$, только в средней точке. Таким образом, пространство элементов Крузее-Равьяра будет состоять из разрывных функций вдоль сторон треугольников. Пространство элементов Крузее-Равьяра является неконформным.

Пример 5.3. Рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$, элементом области полагаем треугольник T . Пусть $\Pi = P_2(T) = \text{span}\{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$ пространство квадратичных функций на треугольнике с размерностью $s = 6$, Σ определяется значениями функций из Π в s точках, принадлежащих треугольнику. Если степенями свободы являются значения в вершинах треугольника и в серединах сторон, тогда функция $p \in \Pi$ на стороне треугольника T , общей с треугольником $\tilde{T}$, однозначно определяется значениями на концах стороны и в ее средней точке и совпадает вдоль этой стороны с функцией $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}$, определенной на треугольнике $\tilde{T}$. Таким образом, пространство P_2 -элементов будет состоять из непрерывных функций $V_h \subset C^0(\Omega)$ и будет являться конформным. Схематическое изображение P_2 -элемента представлено на Рис. 1 (Quadratisches Dreieckelement).

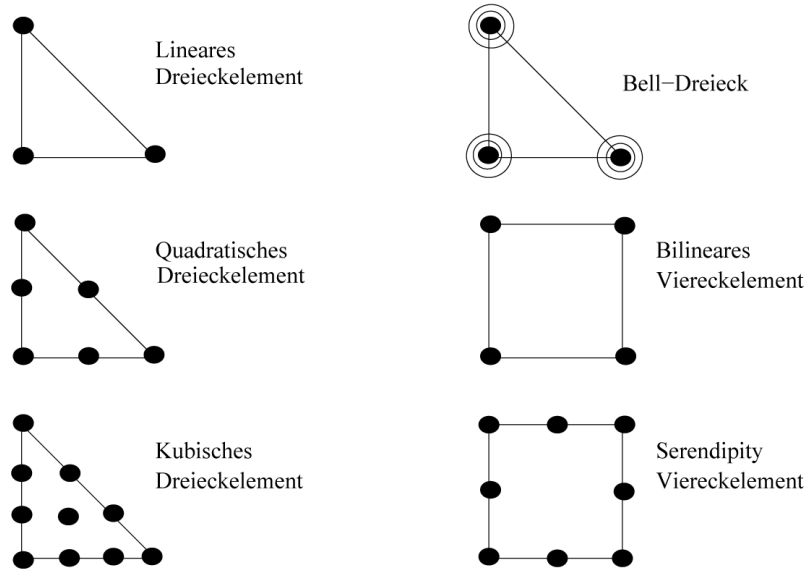


Рис. 1: Примеры конечных элементов.

5.3 Построение функций формы для линейного треугольного конечного элемента $P_1(T)$

Рассмотрим P_1 -элемент на треугольнике T с вершинами $a_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 3}$. Полагаем обход вершин треугольника против часовой стрелки. Многочлены первой степени на треугольнике $P_1(T)$ однозначно определяются значениями функций в вершинах $\Sigma = \{p(a_i), i = \overline{1, 3}\}$. Действительно, произвольную функцию пространства $p \in P_1(T)$ можно разложить по базису $L_i(x, y)$ в следующем виде

$$p(\xi) = p(a_1)L_1(\xi) + p(a_2)L_2(\xi) + p(a_3)L_3(\xi) \quad \forall \xi = (x, y) \in T, \forall p \in P_1(T).$$

Возьмем в качестве функций $p(\xi)$ базисные функции $\{x, y, 1\}$ пространства $P_1(\mathbb{R}^2)$ и построим с их помощью функции формы на треугольнике T . Получим систему уравнений для определения

функций формы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(\xi) \\ L_2(\xi) \\ L_3(\xi) \end{pmatrix}.$$

Применяя правило Крамера к построенной системе уравнений имеем, что

$$L_1(\xi) = \frac{S(\Delta \xi a_2 a_3)}{S(T)}, \quad L_2(\xi) = \frac{S(\Delta a_1 \xi a_3)}{S(T)}, \quad L_3(\xi) = \frac{S(\Delta a_1 a_2 \xi)}{S(T)},$$

где

$$S(T) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим свойства построенных функций функций:

1. $L_i \in P_1(T)$;
2. $0 \leq L_i(\xi) \leq 1, \quad \xi \in T$;
3. $L_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, 3}$;
4. $\sum_{i=1}^3 L_i(\xi) = 1$.

Построенные функции формы имеют геометрическую интерпретацию: они являются барицентрическими координатами произвольной точки $\xi \in T$ относительно вершин треугольник a_i

$$T = \{\xi = a_1 \lambda_1(\xi) + a_2 \lambda_2(\xi) + a_3 \lambda_3(\xi) : 0 \leq \lambda_i(\xi) \leq 1, \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\xi) = 1\}.$$

Отметим некоторые свойства барицентрических координат, которые будут использоваться в дальнейшем при построении функций формы для P_n -элементов, $n > 1$,

- если $\lambda_i = 1$, то барицентрические координаты задают вершину a_i ;
- если $\lambda_i = 0$, то барицентрические координаты задают множество точек стороны треугольника, противоположной вершине a_i ;
- если $\lambda_i = 0.5$, то барицентрические координаты задают точки средней линии, противоположной вершине a_i .

Теорема 5.2. Пусть T является d -симплексом с вершинами $a_i, i = 1, \dots, d+1$. Тогда для заданного целого $k \geq 0$ всякий многочлен $p \in P_k(T)$ однозначно определяется своими значениями на множестве

$$\left\{ \xi = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}, \quad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Условиям Теоремы 5.2 соответствуют треугольные конечные элементы при $d = 2$, например на Рис. 1 (Lineares Dreieckelement, Quadratisches Dreieckelement, Kubisches Dreieckelement), а также тетраэдральные конечные элементы при $d = 3$.

5.4 Аффинные семейства треугольных конечных элементов

Предположим, что задано семейство треугольных конечных элементов (T, Π, Σ) , отличие между которыми только в задании элемента T . Целью является поиск наиболее простого описания такого семейства. Практическая реализация и анализ метода конечных элементов значительно упрощается, если все конечные элементы, соответствующие разбиению области, могут быть получены из одного **типового элемента**.

Обозначим через $\hat{T}$ типовой треугольник с вершинами $\hat{a}_1 = (0, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 0)$, $\hat{a}_3 = (0, 1)$. Произвольный треугольник T может быть получен из типового треугольника $\hat{T}$ с помощью аффинного преобразования F

$$F_T : \hat{T} \rightarrow T, \quad F_T(\hat{\xi}) = B_T \hat{\xi} + d_T \text{ или } \xi = B_T \hat{\xi} + d_T, \quad \xi \in T,$$

где $B_T = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $d_T \in \mathbb{R}^2$. Матрица B_T и вектор d_T определяются из условия соответствия вершин $F_T(\hat{a}_i) = a_i$, $i = \overline{1, 3}$. Имеем

$$F_T(\hat{a}_1) = d_T \Rightarrow d_T = a_1,$$

$$F_T(\hat{a}_2) = b_1 + d_T \Rightarrow b_1 = a_2 - a_1,$$

$$F_T(\hat{a}_3) = b_2 + d_T \Rightarrow b_2 = a_3 - a_1.$$

Тогда матрица $B_T = (a_2 - a_1, a_3 - a_1)$. Матрица B_T является невырожденной, так как $\det B_T = 2S(T)$, следовательно существует обратное преобразование $F_T^{-1} : T \rightarrow \hat{T}$.

Возьмем произвольную точку $\hat{\xi}$ на типовом элементе, барицентрические координаты которой обозначи через $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$. Тогда имеем, что

$$F_T(\hat{\xi}) = F_T \left(\sum_{i=1}^3 \hat{\lambda}_i \hat{a}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \hat{\lambda}_i F_T(\hat{a}_i) = \sum_{i=1}^3 \hat{\lambda}_i a_i,$$

т.е. преобразование F_T не изменяет барицентрические координаты точек треугольника. Взаимно однозначное соответствие между точками множеств $\hat{T}$ и T позволяет ассоциировать пространство Π_T с пространством $\Pi_{\hat{T}}$

$$\Pi_T = \{p : T \rightarrow \mathbb{R} : p = \hat{p} \circ F_T^{-1}, \quad \hat{p} \in \Pi_{\hat{T}}\}.$$

Другими словами, вместо описания семейства конечных элементов данными (T, Π_T, Σ_T) для каждого элемента достаточно задать один типовой конечный элемент $(\hat{T}, \Pi_{\hat{T}}, \Sigma_{\hat{T}})$ и аффинные отображения F_T для каждого элемента. Говорят тогда, что произвольный конечный элемент (T, Π_T, Σ_T) аффинно-эквивалентен типовому конечному элементу $(\hat{T}, \Pi_{\hat{T}}, \Sigma_{\hat{T}})$ и определяется преобразованием F_T . Семейство треугольных конечных элементов является аффинным семейством, так как все его элементы аффинно-эквивалентны одному конечному элементу. Такая связь является существенной для реализации и анализа метода конечных элементов. Вычисления коэффициентов линейной системы $Az = b$, представляющей дискретную задачу, производится на типовом конечном элементе, а не на общем конечном элементе.

Для построения дискретной задачи будет использоваться переход от произвольного элемента T к типовому элементу $\hat{T}$. Для этого понадобятся следующие соотношения

$$\int_T f(x, y) dx dy = \int_{\hat{T}} f \circ F_T(\hat{x}, \hat{y}) |J(\hat{x}, \hat{y})| d\hat{x} d\hat{y}, \quad \text{где } J(\hat{x}, \hat{y}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} = \det B_T;$$

$$\nabla_{\xi} f(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial f}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} = B_T^{-T} \nabla_{\hat{\xi}} (f \circ F_T(\hat{\xi})),$$

где для последнего равенства использовалось соотношение $\hat{\xi} = B_T^{-1} (\xi - d_T)$.

Задания

Задание 5.1 (теория). Построить базисные функции для P_1 -элемента на типовом треугольнике $\hat{T}$ с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

Задание 5.2 (теория). Построить базисные функции для P_1 -элемента на типовом тетраэдре $\hat{T}$ с вершинами $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Задание 5.3 (теория). Построить базисные функции для P_2 -элемента на треугольнике, где

$$\Sigma = \{p(a_1), p(a_2), p(a_3), p(a_{12}), p(a_{13}), p(a_{23})\},$$

a_i — вершины треугольника, $a_{ij} = (a_i + a_j)/2$ для $i \neq j$. Базисные функции строятся из условий

$$L_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad a_j \in \{a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}\}$$

и выражаются через барицентрические координаты треугольника. Например,

$$L_1(x, y) = \lambda_1(\lambda_1 - 0.5)2 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1).$$

Задание 5.4 (теория). Построить базисные функции для P_3 -элемента на треугольнике, где

$$\Sigma = \{p(a_1), p(a_2), p(a_3), p(a_{112}), p(a_{113}), p(a_{221}), p(a_{223}), p(a_{331}), p(a_{332}), p(a_{123})\},$$

a_i — вершины треугольника, $a_{iij} = (2a_i + a_j)/3$ для $i \neq j$ и $a_{123} = (a_1 + a_2 + a_3)/3$. Базисные функции строятся из условий

$$L_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad a_j \in \{a_1, a_2, a_3, a_{112}, a_{113}, a_{221}, a_{223}, a_{331}, a_{332}, a_{123}\}$$

и выражаются через барицентрические координаты треугольника. Например,

$$L_1(x, y) = \frac{9}{2}\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{3})(\lambda_1 - \frac{2}{3}) = \lambda_1(3\lambda_1 - 1)(3\lambda_1 - 2)/2.$$

Задание 5.5 (практика). Построить графики базисных функций для P_3 -элемента на типовом треугольнике $\hat{T}$ с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Базисные функции для P_3 -элемента строятся в Задании 5.4 через барицентрические координаты произвольного треугольника. Барицентрические координаты треугольника совпадают с базисными функциями для P_1 -элемента $\lambda_i(x, y) = L_i(x, y)$, $i = \overline{1, 3}$. Базисные функции для P_1 -элемента на типовом треугольнике строятся в Задании 5.1.

Задание 5.6 (практика). Построить графики базисных функций для P_3 -элемента на произвольном треугольнике T . Используйте результат предыдущего задания, а также аффинное преобразование $F_T(\hat{\xi})$ типового треугольника в произвольный треугольник, см. раздел 5.4.

Список литературы

- [1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.
- [2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.
- [3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.
- [4] Шайдулов, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.
- [5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.
- [6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.
- [7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.
- [8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.
- [9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.
- [10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.
- [11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.
- [12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.