1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

4 Существование и единственность решения вариационной задачи

Определение 4.1. Пусть H — гильбертово пространство. Линейная форма $l(v) : H \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной**, если $\exists\, C = const > 0$, что

$$|l(v)| \leq C||v||_H \quad \forall v \in H.$$

Билинейная форма $a : H \times H \to \mathbb{R}$ называется непрерывной, если $\exists\, C = const > 0$, что

$$|a(u,v)| \leq C||u||_H||v||_H \quad \forall u, v \in H.$$

Определение 4.2. Пусть H — гильбертово пространство. Билинейная форма называется эллиптической (H-эллиптической), если $\exists\, \alpha = const > 0$, что

$$a(u,u) \geq \alpha||u||_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Эллиптическая билинейная форма порождает **энергетическую норму** в пространстве H

$$||u||_a := \sqrt{a(u,u)}.$$

Энергетическая норма, порожденная непрерывной эллиптической билинейной формой, эквивалентна норме пространства H

$$\sqrt{\alpha}||u||_H \leq ||u||_a \leq \sqrt{C}||u||_H.$$

Лемма 4.1 (Лакса-Мильграма о существовании единственного решения)**.** *Пусть V — замкнутое выпуклое подпространство гильбертова пространства H и $a : H \times H \to \mathbb{R}$ — непрерывная эллиптическая билинейная форма. Тогда $\forall l \in H'$, где H' — пространство непрерывных линейных функционалов на H, задача минимизации*

$$\min\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - l(v) \ : \ v \in V\right\}$$

имеет единственное решение.

Замечание 4.1. В Теореме 2.2 сформулированы условия существования единственного решения задачи минимизации в более широком линейном (векторном) пространстве V. Поэтому ограничения на билинейную форму и линейный функционал в Теореме 2.2 и в Лемме Лакса-Мильграма 4.1 отличаются. В частности, для однозначной разрешимости задачи минимизации в линейном пространстве билинейная форма $a(u,v)$ должна быть симметрической и положительной, функционал $l(v)$ линейным.

Замечание 4.2. В случае, когда $V = H$, выполнение условий леммы Лакса-Мильграма 4.1 гарантирует существование единственного решения $u \in V$ вариационных уравнений, соответствующих задаче минимизации,

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

для каждого $l \in V'$. В частном случае, когда $a(u, v) = (u, v)_0$, билинейная форма является непрерывной и эллиптичной, следовательно существует единственная функция $u \in V$, что

$$(u, v)_0 = l(v) \quad \forall v \in V$$

для каждого $l \in V'$. Таким образом, построено отображение $V' \to V$, где линейному функционалу $l(v)$ поставлена в соответствие единственная функция $u \in V$. Построенное отображение называется каноническим представлением функционала.

4.1 Задача Дирихле

Для однородной задачи Дирихле

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, &(1)\\ u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, &(2) \end{aligned}$$

где

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u(\mathbf{x})\right) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}),$$

вариационная задача имеет следующий вид (см. подраздел 2.1.1):

Найти $u \in V = \{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ такую, что

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{3}$$

где

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + cuv \right) d\mathbf{x}, \tag{4}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv d\mathbf{x}. \tag{5}$$

Определение 4.3. Функция $u \in H_0^1(\Omega)$ называется **обобщенным (слабым) решением** однородной задачи Дирихле (1)–(2) если она является решением вариационной задачи (3)–(5) в пространстве $V = H_0^1(\Omega)$.

Обобщенное решение является обобщением понятия классических решений дифференциальных уравнений. Это понятие возникло в связи с многими задачами математической физики, когда под решениями дифференциальных уравнений потребовалось понимать функции, не имеющие достаточного числа производных.

Понятие обобщенного решения не противоречит понятию классического решения.

Теорема 4.1. *Каждое обобщенное решение $u \in H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле (1)–(2), для которого $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, является также классическим решением задачи Дирихле.*

В дальнейшем полагаем, что обобщенное решение любой эллиптической краевой задачи (не только однородной задачи Дирихле) — это решение соответствующей вариационной задачи в некотором гильбертовом пространстве.

Теорема 4.2. *Пусть* $V = H_0^1(\Omega)$, $f(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega)$, $c(\mathbf{x}) \geq 0$ *и билинейная форма (4) является* **равномерно эллиптической**

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j v \partial_i v \geq \alpha \sum_i (\partial_i v)^2$$

для вариационной задачи (3)–(5). Тогда однородная задача Дирихле (1)–(2) имеет единственное обобщенное решение $u \in H_0^1(\Omega)$*, т.е. единственное решение вариационной задачи (3)–(5) при* $V = H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 необходимо показать, что билинейная форма (4) является непрерывной и эллиптической в $H_0^1(\Omega)$, а линейный функционал (5) является непрерывным в $H_0^1(\Omega)$.

1. Покажем, что билинейная форма (4) является непрерывной в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Пусть

$$\tilde{c} := \sup\left\{|a_{ij}(\mathbf{x})| \;:\; \mathbf{x} \in \Omega, \quad i,j = \overline{1,n}\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u \partial_i v\right) d\mathbf{x}\right| &= \left|\sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\partial_j u \partial_i v d\mathbf{x}\right| \leq \sum_{i,k=1}^{n} \left|\int_\Omega a_{ij}\partial_j u \partial_i v d\mathbf{x}\right| \\
&\leq \tilde{c} \sum_{i,j=1}^{n} \left|\int_\Omega \partial_j u \partial_i v d\mathbf{x}\right| \overset{\text{н-во Буняковского}}{\to} \\
&\leq \tilde{c} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega (\partial_j u)^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \left(\int_\Omega (\partial_i v)^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \overset{\text{разделение переменных}}{\to} \\
&= \tilde{c} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_\Omega (\partial_j u)^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega (\partial_i v)^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \overset{\text{н-во Коши}}{\to} \\
&\leq \tilde{c} \left(\sum_{j=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega (\partial_j u)^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\partial_i v)^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \\
&= \tilde{c} n |u|_1 |v|_1.
\end{aligned}$$

$$|a(u,v)| \leq \tilde{c} n |u|_1 |v|_1 + c||u||_0 ||v||_0 \overset{\text{н-во Фридрихса}}{\to} \leq \tilde{c} n |u|_1 |v|_1 + c|u|_1 |v|_1 \leq C|u|_1 |v|_1.$$

Следовательно билинейная форма (4) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$.

2. Покажем, что билинейная форма (4) является эллиптической в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

$$a(v,v) \geq \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j v \partial_i v\right) d\mathbf{x} \overset{\text{св-во равном. эллипт.}}{\to} \geq \int_\Omega \left(\alpha \sum_i (\partial_i v)^2\right) d\mathbf{x} = \alpha |v|_1^2.$$

Следовательно билинейная форма (4) является эллиптической в $H_0^1(\Omega)$.

3. Покажем непрерывность линейного функционала (5) в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

$$|l(v)| = \left|\int_\Omega f v d\mathbf{x}\right| \overset{\text{н-во Буняковского}}{\to} \leq ||f||_0 ||v||_0 \overset{\text{н-во Фридрихса}}{\to} \leq c|v|_1.$$

Следовательно линейная форма (5) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 однородная задача Дирихле (1)–(2) имеет единственное обобщенное решение в $H_0^1(\Omega)$. Теорема доказана. $\square$

Пример 4.1. Рассмотрим однородную задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Пусть $V = H_0^1(\Omega)$. Соответствующая билинейная форма

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v \right) d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}$$

является равномерно эллиптической ($\alpha = 1$), $f \equiv 0$, $c = 0$ следовательно однородная задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет единственное обобщенное решение в $H_0^1(\Omega)$. Если $V = H^1(\Omega)$, то свойство эллиптичности для билинейной формы не выполняется, т.к., в частности, для $v = const$ имеем, что $a(v, v) = 0$. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 вариационная задача в $V = H^1(\Omega)$ может не быть однозначно разрешимой.

Пример 4.2. Для неоднородной задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^n \partial_i \left(a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_j u(\mathbf{x}) \right) + c(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) &= g_D(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

в подразделе 2.1.2 построена вариационная задача:

Найти $w \in V$ такую, что

$$a(w, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{6}$$

где

$$a(w, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_j w \partial_i v + c w v \right) d\mathbf{x}, \tag{7}$$

$$l(v) = \int_\Omega f v d\mathbf{x} - a(u_0, v). \tag{8}$$

Полагаем $V = H_0^1(\Omega)$ и $u(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) \in U = \{u \ : \ u \in H^1(\Omega), u = g_D \text{ на } \partial\Omega\}$.

Для вариационной задачи в пространстве $V = H_0^1(\Omega)$ применима Теорема 4.2. А именно, для однозначной разрешимости вариационной задачи должны выполняться условия, что $f \in L_2(\Omega)$, $c(\mathbf{x}) \geq 0$ и билинейная форма равномерно эллиптическая. Из требования полноты необходимо положить $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.

4.2 Задача Неймана

Для задачи Неймана

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, & (9) \\ \sum_{i,j} a_{ij} \partial_j u n_i &= g_N(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega & (10) \end{aligned}$$

вариационная задача имеет следующий вид (см. подраздел 2.1.3):

Найти $u \in V = \{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})\}$ такую, что

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{11}$$

где

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_j u \partial_i v + cuv \right) d\mathbf{x}, \tag{12}$$

$$l(v) = \int_\Omega f v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g_N v d\mathbf{s}. \tag{13}$$

Замечание 4.3. При переходе от краевой задачи к вариационной задаче условие Неймана не влияет на определение функционального пространства тестовых функций V, но изменяет вариационные уравнения. Условие Неймана называется **естественным условием** в контексте вариационной постановки. Условие Дирихле влияет на определение функционального пространства и называется **существенным условием**.

Сформулируем результат однозначной разрешимости в обобщенном смысле для задачи Неймана, аналогичный Теореме 4.2.

Теорема 4.3. *Пусть $V = H^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $g_N \in L_2(\partial\Omega)$, $\underline{c(\mathbf{x}) \geq \beta > 0}$ и билинейная форма (12) является равномерно эллиптической*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_j v \partial_i v \geq \alpha \sum_i (\partial_i v)^2$$

для вариационной задачи (11)–(13). Тогда задача Неймана (9)–(10) имеет единственное обобщенное решение в $H^1(\Omega)$, т.е. единственное решение вариационной задачи (11)–(13) при $V = H^1(\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 необходимо показать, что билинейная форма (12) является непрерывной и эллиптической в $H^1(\Omega)$, а линейный функционал (13) является непрерывным в $H^1(\Omega)$.

1. Покажем, что билинейная форма (12) является непрерывной в пространстве $H^1(\Omega)$. При доказательстве Теоремы 4.2 показано, что билинейная форма (12) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$

   $$|a(u, v)| \leq C|u|_1|v|_1,$$

   следовательно билинейная форма является непрерывной в $H^1(\Omega)$.

2. Покажем, что билинейная форма (12) является эллиптической в пространстве $H^1(\Omega)$.

   $$\begin{aligned} a(v, v) \quad &\geq \quad \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_j u \partial_i v \right) d\mathbf{x} + \beta ||v||_0^2 \overset{\text{св-во равном. эллипт.}}{\rightarrow} \\ &\geq \quad \alpha \int_\Omega \sum_i (\partial_i v)^2 \, d\mathbf{x} + \beta ||v||_0^2 \geq \min\{\alpha, \beta\} ||v||_1^2. \end{aligned}$$

   Следовательно билинейная форма (12) является эллиптической в $H^1(\Omega)$.

3. Покажем непрерывность линейного функционала (13) в пространстве $H^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}|l(v)| &= \left|\int_\Omega fv d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g_N v d\mathbf{s}\right| \overset{\text{н-во Буняковского}}{\rightarrow} \\ &\le ||f||_0||v||_0 + ||g_N||_{0,\partial\Omega}||v||_{0,\partial\Omega} \overset{\text{н-во Фридрихса, Теорема о следе}}{\rightarrow} \\ &\le c||v||_1.\end{aligned}$$

Следовательно линейный функционал является непрерывным в $H^1(\Omega)$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 задача Неймана (9)–(10) имеет единственное обобщенное решение в $H^1(\Omega)$. Теорема доказана. □

Пример 4.3. Рассмотрим ситуацию, когда условие $c(\mathbf{x}) \ge \beta > 0$ не выполняется, например, $c(\mathbf{x}) = 0$. В этом случае нельзя доказать эллиптичность билинейной формы ($a(v, v) = 0$ для $v = const$) и, как следствие, задача Неймана не будет иметь единственное решение в $H^1(\Omega)$.

Пусть задана задача Неймана для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned}-\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_N(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

Соответствующая билинейная форма имеет вид

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}, \quad a(v, v) = |v|_1^2.$$

Билинейная форма не является эллиптической в $H^1(\Omega)$. Непосредственно из краевой задачи видно, что решение определяется с точностью до константы. Для того, чтобы вариационная задача имела единственное решение, вместо $H^1(\Omega)$ рассматривается подпространство без констант $H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R} := \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v d\mathbf{x} = 0\}$ (функции, ортогональные постоянной функции в $L_2(\Omega)$).

4.3 Смешанная краевая задача

Для краевой задачи со смешанными граничными условиями

$$\begin{aligned}Lu(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= g_D(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ \sum_{i,j} a_{ij}\partial_j u n_i &= g_N(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N\end{aligned}$$

в подразделе 2.1.4 построена вариационная задача:

Найти $w \in V$ такую, что

$$a(w, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{14}$$

где

$$a(w, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_j w \partial_i v + cwv\right) d\mathbf{x}, \tag{15}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv d\mathbf{x} - a(u_0, v) + \int_{\Gamma_N} g_N v d\mathbf{s}. \tag{16}$$

Полагаем $V = H^1(\Omega)$ и $u(bfx) = w(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) \in U = \{u : u \in H^1(\Omega), u = g_D \text{ на } \Gamma_D\}$.

Аналогично рассуждениям в доказательстве Теоремы 4.3 можно показать, что фунционал (16) является непрерывным. Тогда имеем, что при выполнении условий Теоремы 4.3, краевая задача со смешанными граничными условиями будет иметь единственное решение в пространстве $H^1(\Omega)$.

Задания

Задание 4.1 (теория). Для однородной задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -u''(x) + \varepsilon u(x) &= f(x) \quad x \in \Omega = (0,1) \\ u(x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

исследовать вопрос существования единственного обобщенного решения при различных значениях ε.

Задание 4.2 (теория). Для однородной задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x) \quad x \in \Omega = (0,1) \\ u(x) &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

где $p(x) \in C^1(\Omega), p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \in C(\Omega), q(x) \geq 0, f(x) \in C^2(\Omega)$, построить вариационную формулировку и показать, что задача имеет единственное обобщенное решение в $H_0^1(\Omega)$.

Задание 4.3 (теория). Задана эллиптическая, но не равномерно эллиптическая билинейная форма $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\Omega = (0,1)$,

$$a(u,v) = \int_0^1 x^2 u'v' dx,$$

и функционал

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \int_0^1 v dx.$$

Необходимо построить краевую задачу, соответствующую задаче минимизации функционала, и показать, что решение $u \notin H_0^1(\Omega)$, т.е. $|u|_1$ не существует (интеграл, соответствующий указанной норме, расходится).

Задание 4.4 (практика). Рассмотрите произвольную математическую модель, которая описывается в виде краевой задачи для уравнения с частными производными второго порядка гиперболического или параболического типа **в трехмерной области по пространственным переменным**. Постройте численное решение модели с помощью метода конечных элементов средствами PDE Toolbox в Matlab или библиотеки FEniCS в Питоне или в Mathematica. На занятии представьте содержательную постановку задачи (если имеется), математическую модель и реализацию решения задачи.

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.