

1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

3.1 Пространство Лебега

Полагаем, что все рассматриваемые функции и векторные пространства определены над полем вещественных чисел. Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. **Пространство Лебега** $L_2(\Omega)$ — это пространство классов эквивалентности измеримых функций $u(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, квадратично суммируемых на Ω по Лебегу

$$L_2(\Omega) = \{u : \int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x} < \infty\}.$$

Приведем некоторые свойства функций из пространства $L_2(\Omega)$.

Свойство 1 (скалярное произведение в $L_2(\Omega)$). Можно задать функцию скалярного произведения, определенную на $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$

$$(u, v)_0 := (u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv d\mathbf{x}. \quad (1)$$

Величина

$$\|u\|_0 := \sqrt{(u, u)_0} = \left(\int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \quad (2)$$

называется нормой для $u \in L_2(\Omega)$.

Индекс нуль указывает на то, что в определении нормы не используются производные от функции. $L_2(\Omega)$ — это гильбертово пространство: бесконечномерное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение и выполнена аксиома полноты.

Свойство 2 (неравенство Буняковского в $L_2(\Omega)$). В $L_2(\Omega)$ выполняется неравенство Буняковского (неравенство Коши-Шварца)

$$|(u, v)_0| \leq \|u\|_0 \|v\|_0.$$

Неравенство Буняковского является частным случаем неравенства Гельдера для интегралов

$$|(u, v)_0| \leq \|u\|_{L_p} \|v\|_{L_q}$$

для $u \in L_p(\Omega), v \in L_q(\Omega)$, где $1 \leq p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Аналог неравенства Буняковского для конечных сумм называется неравенством Коши.

Свойство 3 (неравенство Минковского). В $L_2(\Omega)$ выполняется неравенство Минковского

$$\|u + v\|_0 \leq \|u\|_0 + \|v\|_0.$$

Неравенство Минковского в общем случае

$$\|u + v\|_{L_p} \leq \|u\|_{L_p} + \|v\|_{L_p}$$

для $u, v \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Свойство 4 (обобщенная производная в $L_2(\Omega)$). Функция $u \in L_2(\Omega)$ имеет обобщенную (слабую) производную $\partial^\alpha u$ порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в Ω , если $\partial^\alpha u \in L_2(\Omega)$ и выполняется равенство

$$(\partial^\alpha u, \phi)_0 = (-1)^{|\alpha|} (u, \partial^\alpha \phi)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3)$$

Переменная $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ обозначает мультииндекс, где α_i неотрицательные целые числа. Порядок индекса $|\alpha| = \sum \alpha_i$, оператор дифференцирования $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. $C^\infty(\Omega)$ — пространство непрерывных бесконечно-дифференцируемых функций в области Ω . Пространство $C_0^\infty(\Omega)$ является подпространством $C^\infty(\Omega)$, функции которого принимают значения, отличные от нуля, только на компактной подобласти Ω (финитные функции).

Обобщенная производная является распространением понятия производной на некоторые классы недифференцируемых функций. Если функция дифференцируема в классическом смысле, тогда существует ее обобщенная производная и обе производные совпадают.

Определение производной в $L_2(\Omega)$ переносится и на дифференциальные операторы. Например, для функции $u \in L_2(\Omega)^n$ существует оператор дивергенции $\nabla \cdot u$, если $\nabla \cdot u \in L_2(\Omega)$ и справедливо

$$(\nabla \cdot u, \phi)_0 = -(u, \nabla \cdot \phi)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пример 3.1. Покажем, что функция $u(x) \in L_2(0, 1)$

$$u(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0, 0.5] \\ 2 - 2x, & x \in (0.5, 1) \end{cases}$$

дифференцируема в обобщенном смысле и построим ее обобщенную производную. Для этого необходимо показать выполнение равенства (3) при $\alpha = (1)$. Возьмем произвольную функцию $\phi \in C_0^\infty(0, 1)$. С помощью формулы интегрирования по частям можно показать, что

$$\begin{aligned} (-1)^1 (u, \partial^1 \phi)_0 &= - \left(\int_0^{0.5} 2x \phi'(x) dx + \int_{0.5}^1 (2 - 2x) \phi'(x) dx \right) \\ &= - \left(- \int_0^{0.5} 2\phi(x) dx + u(0.5)\phi(0.5) - \int_{0.5}^1 -2\phi(x) dx - u(0.5)\phi(0.5) \right) \\ &= \int_0^{0.5} 2\phi(x) dx + \int_{0.5}^1 -2\phi(x) dx. \end{aligned}$$

Имеем, что равенство (3) выполняется для любой $\phi \in C_0^\infty(0, 1)$ и обобщенная производная равна

$$\partial^1 u(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0, 0.5] \\ -2, & x \in (0.5, 1). \end{cases}$$

Отметим, что в точке $x = 0.5$ обобщенная производная может быть определена произвольно.

Пример 3.2. Покажем, что функция $u(x) \in L_2(0, 1)$

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 0.5] \\ 1, & x \in (0.5, 1). \end{cases}$$

не дифференцируема в обобщенном смысле. Проверим выполнение равенства (3) при $\alpha = (1)$. Возьмем произвольную функцию $\phi \in C_0^\infty(0, 1)$. С помощью формулы интегрирования по частям имеем, что

$$\begin{aligned} (-1)^1 (u, \partial^1 \phi)_0 &= - \left(\int_0^{0.5} 0 \phi'(x) dx + \int_{0.5}^1 1 \phi'(x) dx \right) \\ &= - (0 + \phi(1) - \phi(0.5)) = \phi(0.5) = \int_0^1 \delta(x - 0.5) \phi(x) dx. \end{aligned}$$

δ -функция $\notin L_2(\Omega)$, следовательно заданная функция $u(x)$ не имеет обобщенной производной. Таким образом получаем, что в рамках дифференцирования в обобщенном смысле, кусочно-дифференцируемую функцию не всегда можно кусочно-дифференцировать.

3.2 Пространство Соболева

Определение 3.1. Пространство Соболева $H^m(\Omega)$ для $m \in \mathbb{Z}_+$ — это множество функций $u \in L_2(\Omega)$, для которых существуют обобщенные производные $\partial^\alpha u$ при $|\alpha| \leq m$,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq m\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Отметим, что при $m = 0$ $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. Пространства Соболева являются вложенными друг в друга $L_2(\Omega) = H^0(\Omega) \supset H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega) \supset \dots$.

Пространство Соболева определено и впервые применено в теории краевых задач математической физики. Отметим некоторые свойства пространств Соболева.

Свойство 5 (скалярное произведение в $H^m(\Omega)$). Можно задать функцию скалярного произведения, определенную на $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$,

$$(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0,$$

определить соответствующую норму

$$\|u\|_m := \sqrt{(u, u)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_0^2}$$

и полунорму

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_0^2}.$$

Пространство $H^m(\Omega)$ является гильбертовым пространством: полное векторное пространство со скалярным произведением.

В теории краевых задач особый интерес представляют пространства $H^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega)$. Для этих пространств имеем

$$(u, v)_1 = \sum_{|\alpha| \leq 1} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 = (u, v)_0 + \sum_{|\alpha|=1} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 = \int_{\Omega} u v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}.$$

$$(u, v)_2 = \sum_{|\alpha| \leq 2} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 = (u, v)_1 + \sum_{|\alpha|=2} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0.$$

Пример 3.3. Вычислить норму для функции $u(x) = \sin x$ в пространствах $H^m(0, 2\pi)$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

$$\|u\|_0 = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) dx} = \sqrt{\pi}.$$

$$\|u\|_1 = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(x) + \cos^2(x) dx} = \sqrt{2\pi}.$$

$$\|u\|_m = \sqrt{(m+1)\pi}.$$

Последнее равенство получено методом индукции.

Свойство 6 (альтернативное определение пространства Соболева). $H^m(\Omega)$ определено как замыкание $C^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_m$. $H_0^m(\Omega)$ — это замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_m$.

В частности, пространство $H_0^m(\Omega)$ состоит из функций $H^m(\Omega)$, чьи производные до порядка $|\alpha| \leq m-1$ равны нулю на границе области. Пространство $H_0^m(\Omega)$ играет важную роль при решении краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка с условиями Дирихле на границе области.

Свойство 7 (эквивалентность нормы и полунормы в $H_0^m(\Omega)$). Норма $\|\cdot\|_m$ и полунорма $|\cdot|_m$ эквивалентны в $H_0^m(\Omega)$, то есть выражаются одна через другую с точностью до умножения на константу.

Этот результат формулируется в виде теоремы

Теорема 3.1. $\forall v \in H_0^m(\Omega)$ справедливо, что

$$|v|_m \leq \|v\|_m \leq (1+s)^m |v|_m,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область, которая содержится в n -мерном кубе с длиной ребра s .

Теорема представляет собой результат обобщения **неравенства Фридрихса** (неравенство Пуанкаре-Фридрихса) для ограниченной области Ω

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \|v\|_0 \leq c(\Omega) |v|_1.$$

Свойство 8 (неравенство Буняковского в $H^m(\Omega)$). Неравенство Буняковского (неравенство Коши-Шварца) справедливо также для скалярного произведения в пространстве $H^m(\Omega)$. Действительно,

$$\begin{aligned} |(u, v)_m| &= \left| \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 \right| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |(\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0| \stackrel{\text{н-во Буняковского}}{\leq} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_0 \|\partial^\alpha v\|_0 \stackrel{\text{н-во Коши}}{\leq} \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_0^2} \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_0^2} = \|u\|_m \|v\|_m. \end{aligned}$$

Свойство 9 (примеры неограниченных функций в $H^1(\Omega)$). • В одномерном случае имеем, что $H^1(\Omega) \subset C(\Omega)$, следовательно неограниченных функций в $H^1(\Omega)$ не существует.

- В двумерном случае функция $u(r) = \ln \ln \frac{2}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, принадлежит $H^1(\Omega)$ и является неограниченной функцией.
- В случае $n \geq 3$ функция $u(r) = r^{-\alpha}$ при $\alpha \leq (n-2)/2$ принадлежит $H^1(\Omega)$ и является неограниченной функцией. Отметим, что с увеличением размерности пространства сингулярность функций, попадающих в пространство $H^1(\Omega)$, усиливается.

Задания

Задание 3.1 (теория). Показать, что функция $u(x)$ дифференцируема в обобщенном смысле и построить ее обобщенную производную.

Варианты:

1. $u(x) = |x|$, $x \in (-1, 1)$;
2. $u(x) = |x| \exp(ax)$, $x \in (-1, 1)$;

3. $u(x) = x|\arctan x - 1|, \quad x \in (-1, 1);$

4. $u(x) = \sin(|x|), \quad x \in (-1, 1);$

5. $u(x) = \sin(x)/|x|, \quad x \in (-1, 1);$

6. $u(x) = |x + 2|, \quad x \in (-3, 1);$

7.

$$u(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in (0, 1] \\ 3x^2 - 2x + 1, & x \in (1, 3) \end{cases}$$

8.

$$u(x) = \begin{cases} 2x/\pi, & x \in (0, \pi/2] \\ \sin x, & x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

9.

$$u(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \exp(3x) - 1, & x > 0 \end{cases}$$

Задание 3.2 (теория). Вычислите следующие нормы $\|\partial^2 u\|_0, \|\partial^1 u\|_1, \|u\|_2$ для функции из Задания 3.1. Для Вариантов 1 и 6 необходимо показать, что вторая производная не существует в обобщенном смысле.

Задание 3.3 (теория). Показать, что функция $u(\mathbf{x}) = 1 \notin H_0^1(\Omega)$, где Ω ограниченное множество. Воспользуйтесь неравенством Пуанкаре-Фридрихса.

Задание 3.4 (практика). **Задача о рассеянии волны в канале**

Постановка задачи. В канал входит плоская волна с длиной волны $\lambda = 0.2$ и в силу отражения от стенок рассеивается. Геометрия канала представлена на Рис. 1. Вход канала расположен слева, выход — сверху. Необходимо построить распределение волны на выходе из канала для различных геометрий стенок канала, см. Рис. 2–4, и оценить влияние геометрии канала на решение.

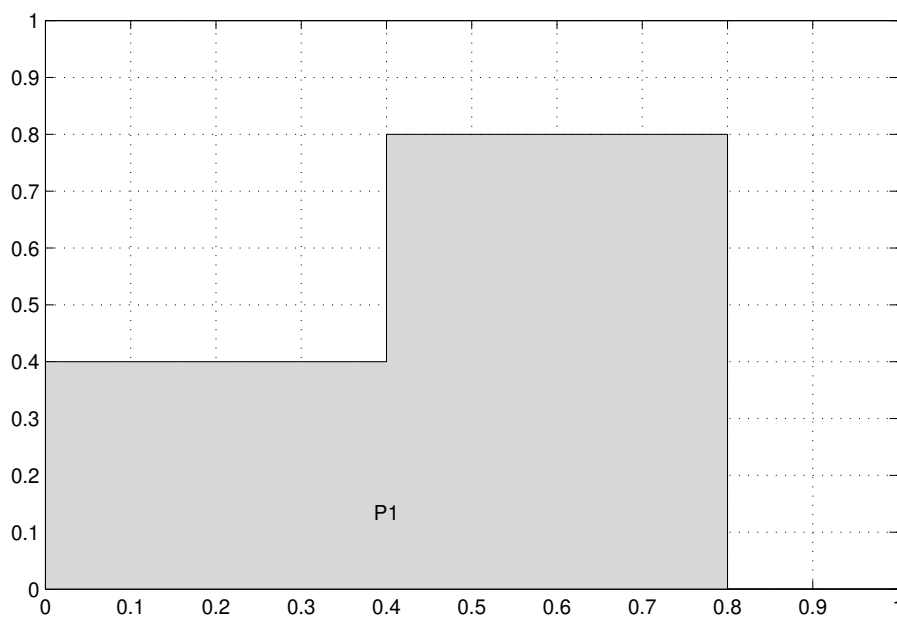


Рис. 1: Геометрия канала.

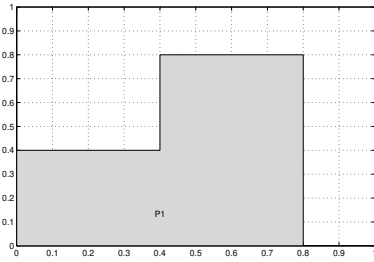


Рис. 2: Канал 1.

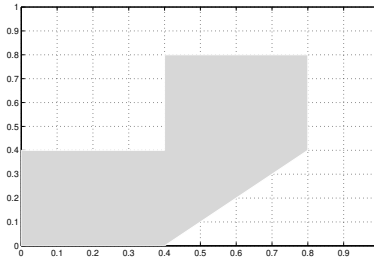


Рис. 3: Канал 2.

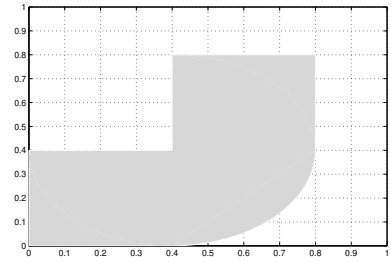


Рис. 4: Канал 3.

Математическая модель. Распространение волны в однородной среде описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

где c — скорость распространения волны. Полагаем, что волна является гармонической, то есть функция $u(x, y, t)$ допускает разделение переменных

$$u(x, y, t) = e^{2\pi i f t} U(x, y),$$

где f — частота волны. В этом случае волновое уравнение сводится к уравнению Гельмгольца

$$-k^2 U - \Delta U = 0,$$

где $k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны. На входе и выходе из канала формулируется условие излучения Зоммерфельда — вся излучаемая энергия должна уходить без потерь. Для монохроматической волны имеем условие на выходе

$$kiU + \frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

и условие на входе

$$ki(e^{-ikx} + U) + \frac{\partial(e^{-ikx} + U)}{\partial n} = 0.$$

Последнее условие для рассматриваемой геометрии канала преобразуется к виду

$$ki(2 + U) + \frac{\partial U}{\partial n} = 0.$$

На стенках канала волна не перемещается, то есть $U(x, y) = 0$.

Реализация. Реализацию задачи можно осуществить

- средствами PDE Toolbox в MATLAB на основе комбинирования возможностей GUI и скриптовой реализации;
- с использованием пакета FEniCS в Питоне;
- в Mathematica с подключением пакета конечных-элементов Needs["NDSolve'FEM'"].

Комментарии по реализации в MATLAB:

1. С помощью GUI PDEToolbox опишите область решения задачи и граничные условия на входе и выходе канала, а также на боковых стенках канала. Экспортируйте в Workspace MATLAB матрицы g и b , описывающие область задачи и граничные условия (меню *Boundary*). Дальнейшая реализация будет осуществляться в скриптовом файле.

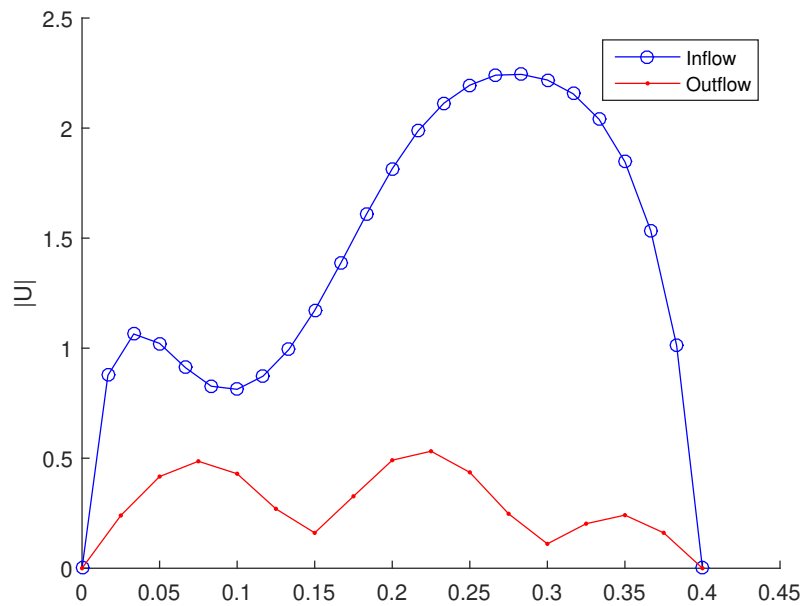


Рис. 5: Распределение волны на входе и выходе канала для геометрии, представленной на Рис. 2.

2. Постройте сетку в расчетной области таким образом, чтобы на длину волны приходилось 8–10 узлов сетки. Постройте численное решение и изобразите $|U(x, y)|$, так как решение задачи является комплекснозначной функцией. Подробности реализации можно посмотреть в примере справочной системы

<https://www.mathworks.com/help/pde/ug/helmholtzs-equation-on-a-unit-disk-with-a-square-hole.html>

3. Постройте график распределения волны на входе канала, что соответствует $x = 0$ (в MATLAB $p(1, :) == 0$), и на выходе канала $y = 0.8$ (в MATLAB $p(2, :) == 0.8$), см. Рис. 5.
4. Рассмотрите три вида геометрии канала, см. Рис. 2–4, и сравните графически распределение волны на выходе, см. Рис. 6. Оцените по построенным графикам влияние геометрии канала на выходящую волну.

5. Постройте анимацию распространения волны $u(x, y, t) = e^{2\pi i f t} U(x, y)$ для одной из форм канала. Для реализации воспользуйтесь примером из справочной системы

<https://www.mathworks.com/help/pde/ug/helmholtzs-equation-on-a-unit-disk-with-a-square-hole.html>.

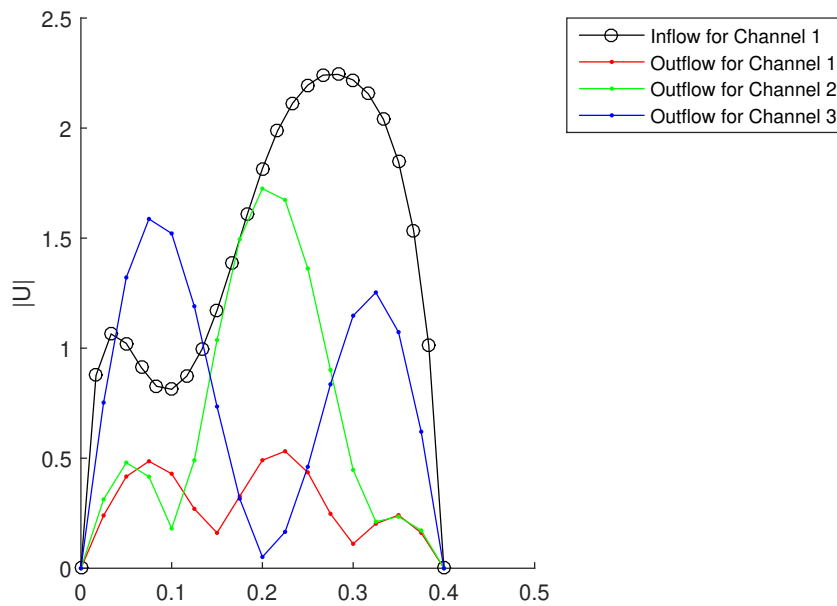


Рис. 6: Распределение волны на выходе для трех каналов.

Список литературы

- [1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.
- [2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.
- [3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.
- [4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.
- [5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.
- [6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.
- [7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.
- [8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.
- [9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.
- [10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.
- [11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

- [12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.