1 Введение

2 Вариационная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

Запишем эллиптическую краевую задачу второго порядка в общем виде для дифференциального оператора в **дивергентной форме**, которая необходима для перехода от краевой задачи к ее вариационной формулировке

$$Lu = f, \quad Lu := -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \left(a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u(\mathbf{x})\right) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2. \tag{1}$$

В силу эллиптичности краевой задачи имеем, что симметрическая матрица $A(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))$ имеет ненулевые вещественные собственнные значения одинакового знака. Полагаем, что матрица $A(\mathbf{x})$ является положительно-определенной.

Неоднородная задача Дирихле для оператора L записывается в виде

$$Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2}$$
$$u(\mathbf{x}) = g_D(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Если правая часть в условии Дирихле равна нулю, $g_D = 0$, имеем однородную задачу Дирихле

$$Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4}$$
$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{5}$$

Задача Неймана для оператора L имеет следующий вид

$$Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{6}$$
$$\sum_{i,j} a_{ij}\partial_j u(\mathbf{x})\, n_i = g_N(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{7}$$

Отметим, что в случае оператора Лапласа $a_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}$ и граничное условие принимает вид $\sum_i \partial_i u\, n_i = g_N$ или $\partial u/\partial n = g_N$.

Приведем также пример краевой задачи со смешанными граничными условиями

$$Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{8}$$
$$u(\mathbf{x}) = g_D(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \tag{9}$$
$$\sum_{i,j} a_{ij}\partial_j u(\mathbf{x}) n_i = g_N(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \tag{10}$$

где $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\mathrm{measure}(\Gamma_D) > 0$.

Определение 2.1. Функция $u(\mathbf{x})$ называется **классическим решением** заданного дифференциального уравнения второго порядка с граничными условиями, если функция удовлетворяет заданному уравнению в каждой точке области $\mathbf{x} \in \Omega$, удовлетворяет заданным граничным условиям и справедливо, в частности, что $u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ для краевой задачи Дирихле и $u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ для краевой задачи Неймана.

Приведем пример задачи, не имеющей классического решения.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение Пуассона в области $\Omega = (-1, 1)^d$

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

с однородным условием Дирихле

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Полагаем $f(\mathbf{x}) = \operatorname{sgn}(0.5 - |\mathbf{x}|)$. Приведенная задача не имеет классического решения так как $\Delta u(\mathbf{x})$ является разрывной функцией и условие $u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega)$ не выполняется.

Для построения метода конечных элементов используется вариационная (интегральная, слабая) формулировка исходной краевой задачи, поэтому метод конечных элементов относится к вариационным численным методам. Переход от краевой задачи к вариационной задаче осуществляется с применением **формулы интегрирования по частям**.

Теорема 2.1 (интегрирование по частям)**.** *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ имеет C^1-границу $\partial\Omega$ и внешнюю нормаль $\mathbf{n} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$. Тогда для функций $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ выполняется*

$$\int_\Omega \partial_i u v d\mathbf{x} = -\int_\Omega u \partial_i v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u v n_i d\mathbf{s}, \tag{11}$$

или в векторном виде

$$\int_\Omega \nabla u v d\mathbf{x} = -\int_\Omega u \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u v \mathbf{n} d\mathbf{s},$$

где $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_d$ — элемент d-мерного объема в области Ω, $d\mathbf{s}$ — элемент $(d-1)$-мерного объема на $\partial\Omega$.

Применим формулу интегрирования по частям для i-ой компоненты векторного поля $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, заданного на области Ω, в i-ом направлении и просуммируем по $i = 1, ..., d$

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{w} v d\mathbf{x} = -\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} v d\mathbf{s}. \tag{12}$$

Частный случай соотношения (12) для тестовой функции $v(\mathbf{x}) = 1$

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{s} \tag{13}$$

называется теоремой о дивергенции или **формулой Остроградского** (Гаусса-Остроградского) и означает равенство интеграла от дивергенции поля $\mathbf{w}$ по области Ω его потоку через границу области $\partial\Omega$.

Полагая $\mathbf{w} = \nabla u$ в (12), получаем **первую формулу Грина**

$$\int_\Omega \Delta u v d\mathbf{x} = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\mathbf{s}. \tag{14}$$

2.1 Построение вариационной формулировки

Перечислим шаги, необходимые для перехода от краевой задачи к соответствующей ей вариационной формулировке.

1. Определить пространство тестовых функций V на области Ω и умножить исходное дифференциальное уравнение на тестовую функцию $v \in V$. Часто определение пространства V основывается на требованиях гладкости для классического решения $u(\mathbf{x})$ исходного дифференциального уравнения и дополнительно полагают функции пространства V равными нулю на части границы области с условием Дирихле, Γ_D.

2. Проинтегрировать полученное уравнение по области Ω и применить формулу интегрирования по частям (11) к главной части дифференциального уравнения. Основная идея – понизить порядок производной решения $u(\mathbf{x})$ в главной части дифференциального уравнения. В частности, для эллиптического уравнения порядок производной для функции $u(\mathbf{x})$ понижается с двух до единицы.

3. Учесть граничные условия задачи в интегралах по границе области $\partial\Omega$.

2.1.1 Однородная задача Дирихле

Осуществим переход от однородной задачи Дирихле (4)–(5) к вариационной задаче. Определим пространство V таким образом, чтобы оно удовлетворяло требованиям гладкости для классического решения $u(\mathbf{x})$, при этом на границе области, где задано условие Дирихле, функции из пространства V полагаем равными нулю

$$V = \{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Умножим уравнение (4) на тестовую функцию $v \in V$ (Шаг 1), проинтегрируем по области Ω и применим к главной части дифференциального уравнения формулу интегрирования по частям (11) (Шаг 2). Учтем, что тестовая функция равна нулю на границе области (Шаг 3).

$$\int_\Omega (Lu - f)\, v d\mathbf{x} = \int_\Omega \left(-\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \left(a_{ij}\partial_j u\right) + cu - f \right) v d\mathbf{x} = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + cuv - fv \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Запишем полученное соотношение в операторном виде

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{15}$$

где $a(u, v)$ — билинейная форма

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + cuv \right) d\mathbf{x}, \tag{16}$$

$l(v)$ обозначает линейный функционал

$$l(v) = \int_\Omega f v d\mathbf{x}. \tag{17}$$

Уравнения (15) называются **вариационными уравнениями**. **Вариационная задача** формулируется в следующем виде:

Найти $u \in V$ такую, что

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V. \tag{18}$$

Напомним, что функционал $l : V \to \mathbb{R}$ называется линейным, если

$$l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$. Функционал $a : V \times W \to \mathbb{R}$ называется билинейной формой, если

$$a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w),$$

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, u, v, w из соответствующих пространств.

Если применить к вариационным уравнениям (15) интегрирование по частям в обратную сторону, то мы придем к краевой задаче (4)–(5) в силу произвольности выбора функции $v \in V$. Имеем, что для классического решения $u(\mathbf{x})$ формулировки (4)–(5) и (15)–(17) эквивалентны.

Замечание 2.1. Классическое решение $u(\mathbf{x})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) в каждой точке области Ω, тогда как решение вариационных уравнений (15) удовлетворяет дифференциальному уравнению в интегральном смысле. Дифференциальное уравнение (2) включает вторые производные решения u, тогда как вариационные уравнения (15) содержат только первые производные. Как следствие, пространство V в вариационных уравнениях может быть определено шире пространства, в котором определено классическое решение. В частности, для задачи Дирихле можно определить $V = C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ вместо пространства $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ классического решения для задачи Дирихле. Более того, для решения вариационных уравнений достаточно иметь кусочно-непрерывную производную, т.е. ослабить требование принадлежности пространству $C^1(\Omega)$. Отметим, что при ослаблении гладкости решения вариационной задачи классическое решение исходной краевой задачи и соответствующее ему решение вариационной задачи в общем случае не совпадает.

2.1.2 Неоднородная задача Дирихле

Для перехода от неоднородной задачи Дирихле (2)–(3) к вариационной формулировке осуществляется предварительная замена переменных для сведения неоднородной задачи Дирихле к однородной задаче Дирихле. А именно, полагаем $w(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x})$ для некоторой функции $u_0(\mathbf{x})$, которая на границе области совпадает с функцией $g_D(\mathbf{x})$ и удовлетворяет требованиям гладкости решения $u(\mathbf{x})$

$$u_0 \in U = \{u : u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), u = g_D \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Тогда, в силу того, что $u(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x})$, строим краевую задачу для функции $w(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} Lw &= f - Lu_0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ w &= 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Осуществим преобразования для построенной однородной задачи Дирихле, см. раздел 2.1.1. В результате получаем следующую вариационную задачу

Найти $w \in V = \{u : u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ такую, что

$$a(w, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{19}$$

где

$$a(w, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_j w \partial_i v + cwv \right) d\mathbf{x}, \tag{20}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv d\mathbf{x} - a(u_0, v). \tag{21}$$

Тогда решение неоднородной задачи Дирихле (2)–(3) можно представить в виде $u(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x})$, где $u(\mathbf{x}) \in U$.

2.1.3 Задача Неймана

При переходе от задачи Неймана (6)–(7) к вариационной формулировке необходимо изменить вид тестового пространства

$$V = \{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})\}.$$

В этом случае изменяется результат применения формулы интегрирования по частям

$$\int_\Omega (Lu - f)\, v d\mathbf{x} = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_j u \partial_i v + cuv - fv \right) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_j u\, n_i \right) v d\mathbf{s} = 0.$$

В результате имеем следующую вариационную формулировку для задачи Неймана (6)–(7)

Найти $u \in V$ такую, что

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{22}$$

где

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_j u \partial_i v + cuv \right) d\mathbf{x}, \tag{23}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g_N v d\mathbf{s}. \tag{24}$$

2.1.4 Смешанная задача

Для случая смешанной краевой задачи (8)–(10) варационная задача представляет собой объединение вариационной задачи для задачи Дирихле и вариационной задачи для задачи Неймана. Тестовое пространство задается в виде

$$V = \{v : v \in C^2(\Omega), v = 0 \text{ на } \Gamma_D\}.$$

Введем замену $w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x})$, где $u_0 \in U = \{u : u \in C^2(\Omega), u = g_D \text{ на } \Gamma_D\}$, см. раздел 2.1.2. Тогда вариационная задача для функции w принимает вид

Найти $w \in V$ такую, что

$$a(w,v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{25}$$

где

$$a(w,v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_j w \partial_i v + cwv \right] d\mathbf{x}, \tag{26}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv d\mathbf{x} - a(u_0, v) + \int_{\Gamma_N} g_N v d\mathbf{s}. \tag{27}$$

Решение смешанной краевой задачи (8)–(10) можно представить в виде $u(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x})$, где $u_0(\mathbf{x}) \in U$.

2.2 Эквивалентность краевой задачи, вариационной задачи и задачи минимизации

Приведем результат из вариационного исчисления об эквивалентности абстрактной задачи минимизации и соответствующей ей вариационной задачи.

Теорема 2.2. *Пусть V — линейное пространство и $a : V \times V \to \mathbb{R}$ — симметрическая положительная билинейная форма и $l : V \to \mathbb{R}$ — линейный функционал. Квадратичный функционал $J(v)$*

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - l(v)$$

принимает в V минимальное значение в точке u, т.е. $J(u) = \min\{J(v) \;:\; v \in V\}$, тогда и только тогда, когда выполняются вариационные уравнения для неизвестной функции u и заданных функций v

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V.$$

Минимальное значение единственно.

Следующая теорема устанавливает связь между однородной задачей Дирихле (4)–(5) и задачей минимизации соответствующего ей функционала.

Теорема 2.3. *Классическое решение однородной задачи Дирихле (4)–(5) для* $c(\mathbf{x}) \geq 0$ *является решением задачи минимизации*

$$\min\{J(v) \,:\, v \in V\}, \tag{28}$$

$$J(v) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_i v \partial_j v + \frac{1}{2} c v^2 - f v \right) d\mathbf{x}, \tag{29}$$

$$V := \{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}. \tag{30}$$

Справедливо также и обратное утверждение: Решение задачи минимизации (28)–(30) является классическим решением задачи (4)–(5).

Доказательство. (i) Покажем, что задача Дирихле (4)–(5) эквивалентна вариационной задаче (15)–(17). Согласно преобразованиям в разделе 2.1.1 имеем, что однородная задача Дирихле (4)–(5) позволяет переформулировку в виде вариационных уравнений (15) для билинейной формы (16) и линейной формы (17). Применеяя формулу интегрирования по частям к билинейной форме имеем обратное утверждение, что решение вариационных уравнений является решением задачи Дирихле.

(ii) Покажем, что задача минимизации (28)–(30) эквивалентна вариационной задаче (15)–(17). Согласно теореме 2.2 необходимо показать, что пространство непрерывно-дифференцируемых функций является линейным пространством, билинейная форма (16) является симметрической и положительной, а функционал (17) линейным.

- Для непрерывно дифференцируемых функций справедливо, что $\forall u, v \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем $\alpha u + \beta v \in V$.
- Свойство симметричности $a(u, v) = a(v, u)$ и линейности функционала $l(v)$ проверяются непосредственной подстановкой.
- Свойство положительности $a(u, u) > 0, \forall u \in V, u \neq 0$ следует из эллиптичности оператора L и ограничения $c(x) \geq 0$.

В силу свойств пространства V и операторов a и l, решение вариационных уравнений минимизирует функционал (29). Согласно теореме 2.2 справедливо также и обратное: из существования единственного решения задачи минимизации следует существование единственного решения вариационной задачи. Теорема доказана. □

Теорема 2.3 представляет результат для случая однородной задачи Дирихле. Следующая теорема справедлива для задачи Неймана.

Теорема 2.4. *Классическое решение задачи Неймана (6)–(7) для* $c(\mathbf{x}) \geq 0$ *является решением задачи минимизации*

$$\min\{J(v) \,:\, v \in V\}, \tag{31}$$

$$J(v) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_i v \partial_j v + \frac{1}{2} c v^2 - f v \right) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g v d\mathbf{s}, \tag{32}$$

$$V := \{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})\}. \tag{33}$$

Справедливо также и обратное утверждение: Решение задачи минимизации (31)–(33) является классическим решением задачи Неймана (6)–(7).

Замечание 2.2. Эквивалентность краевой задачи и вариационной задачи (задачи минимизации) определяется свойствами операторов $a(u, v)$ и $l(v)$, т.е. зависит от заданных функций и коэффициентов исходной задачи, а также геометрии области Ω. Исследование вопроса существования решения вариационных уравнений накладывает ограничения на пространство функций V, см. Тему 4.

Задания

Задание 2.1 (теория). Для заданного векторного поля $w = (-y^2, -2xy)^T$ проверить выполнение теоремы для дивергенции (13) на области $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$.

Задание 2.2 (теория). Постройте вариационную задачу и задачу минимизации, соответствующие краевой задаче. Предварительно дифференциальный оператор необходимо сформулировать в дивергентной форме, см. (1)

Варианты:

1.
$$\begin{aligned} -u''(x) + \varepsilon u(x) &= f(x) \quad x \in \Omega = (0,1), \quad \varepsilon > 0 \\ u(x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \cos(x)u''(x) - \sin(x)u'(x) - xu(x) &= 1 \quad x \in \Omega = \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \\ u'(0) &= -u(0), \\ u(\pi/6) &= 0. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} (x^2+1)u''(x) - xu'(x) &= \sin(2\pi x) \quad x \in \Omega = (0,1), \quad \varepsilon > 0 \\ u &= 0 \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Задание 2.3 (теория). Задача минимизации имеет следующий вид

$$\min\{J(v) \,:\, v \in V\},$$

$$J(v) := \int_\Omega \left(a_1(\partial_1 v)^2 + a_2(\partial_2 v)^2 + a_3(\partial_1 v - \partial_2 v)^2 - 2fv\right) d\mathbf{x},$$

$$V := \{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ на } \partial\Omega\},$$

где $a_1, a_2, a_3 > 0$. Какой вид будет иметь краевая задача?

Необходимо записать вариационные уравнения, соответствующие задаче минимизации, и применить формулу интегрирования по частям (11) для перехода к краевой задаче.

Задание 2.4 (теория). Задана задача минимизации

$$\min\{J(v) \,:\, v \in V\},$$

$$J(v) := \int_a^b \left(\frac{1}{2}[v'(x)]^2 - f(x)v(x)\right) dx - Bv(b),$$

$$V := \{v : v \text{ непрерывна на } [a,b], v' \text{ кусочно-непрерывна на } [a,b], v(a) = 0\}.$$

Необходимо построить эквивалентную формулировку в виде вариационных уравнений. При каких дополнительных условиях можно перевести вариационные уравнения в краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения? Сформулируйте краевую задачу.

Задание 2.5 (теория+практика). Процесс распространения тепла в пластине, состоящей из двух слоев равной толщины с коэффициентами теплопроводности k_1 и k_2, соответственно, описывается следующим уравнением теплопроводности

$$-\nabla \cdot (k_1 \nabla T_1) = 0 \quad (x, y) \in \Omega_1 = (0, 0.5) \times (-\delta, \delta),$$

$$-\nabla \cdot (k_2 \nabla T_2) = 0 \quad (x, y) \in \Omega_2 = (0.5, 1) \times (-\delta, \delta),$$

где $T_1 = T_1(x, y)$, $T_2 = T_2(x, y)$. На границе раздела двух сред выполняется условие переноса

$$[T] = 0, \quad \left[k \frac{\partial T}{\partial n}\right] = 0 \quad \text{при } x = 0.5,$$

где $[\cdot]$ обозначает скачок функции при переходе через линию раздела, т.е. $[T] = T_2 - T_1$, $\left[k \frac{\partial T}{\partial n}\right] = k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}$. Необходимо найти температуру пластины при заданной температуре на боковых стенках

$$T_1 = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

$$T_2 = T_0 \quad \text{при } x = 1,$$

при отсутствии теплового потока на верхней и нижней стенках

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{при } y = \pm\delta.$$

1. Построить вариационную задачу и задачу минимизации, соответствующую исходной краевой задаче.

2. Решить построенную задачу средствами GUI PDE Toolbox, используя режим (Application Mode) Heat Transfer, или на основе скриптовой реализации средствами PDE Toolbox или с использованием пакета FEniCS в Питоне.

3. Найти точное решение задачи методом неопределенных коэффициентов, при условии, что ширина и высота пластины намного больше ее толщины, т.е. $T_i = T_i(x)$ в Ω_i, $i = \overline{1, 2}$. Кусочно-непрерывное точное решение задачи во всей области Ω можно определить с помощью функции Хевисайда $\theta(x)$

   $$T_{exact}(x) = T_1(x)\left(1 - \theta(x - 0.5)\right) + T_2(x)\theta(x - 0.5),$$

   где

   $$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

   В частности, в Matlab функция Хевисайда реализована с помощью встроенной функции *heaviside*.

4. Сравнить визуально приближенное конечно-элементное решение и построенное точное решение T_{exact}.

Варианты:

1. $k_1 = 1, k_2 = 10, T_0 = 10, \delta = 1,$

2. $k_1 = 1, k_2 = 100, T_0 = 1, \delta = 2,$

3. $k_1 = 1, k_2 = 1000, T_0 = 10, \delta = 5,$

4. $k_1 = 1, k_2 = 10^4, T_0 = 1, \delta = 10,$
5. $k_1 = 1, k_2 = 10^5, T_0 = 10, \delta = 1,$
6. $k_1 = 1, k_2 = 10^6, T_0 = 1, \delta = 2,$
7. $k_1 = 1, k_2 = 10^7, T_0 = 10, \delta = 5,$
8. $k_1 = 1, k_2 = 10^6, T_0 = 1, \delta = 10,$
9. $k_1 = 1, k_2 = 10^5, T_0 = 100, \delta = 1,$
10. $k_1 = 1, k_2 = 10^4, T_0 = 100, \delta = 2.$

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.