# 1 Введение

На сегодняшний день метод конечных элементов (МКЭ) является одним из эффективных и часто используемых численных методов решения научных и прикладных инженерных задач, математические модели которых описываются с помощью дифференциальных уравнений с частными производными. В частности, МКЭ применяется для решения задач математической физики (механика деформируемого твердого тела, теплообмен, электромагнетизм, аэро- и гидродинамика). О популярности метода говорит тот факт, что результатом запроса «finite element method» в поисковой системе Google является $\sim 16.1$ млн страниц, для сравнения с конечно-разностным методом «finite difference method», результатом поиска которого является $\sim 3.0$ млн страниц (август 2021 г.).

Метод конечных элементов был разработан инженерами в конце 50-х годов для решения задач механики твердого тела. Первые математические работы по МКЭ — Хренников (1941), Курант (1943), Фридрикс (1962), Оганесян (1966). МКЭ получил популярность в конце 70-х годов в инженерных кругах и среди математиков. Первый учебник по МКЭ написан в 1973 году авторами Стренг и Фикс, известная книга среди инжененров — Зинкевич (1971).

Эффективность метода конечных элементов определяется следующими характеристиками метода:

- МКЭ позволяет осуществлять эффективное компьютерное моделирование нелинейных процессов;
- МКЭ применяется в областях любой геометрической сложности;
- МКЭ обладает развитым математическим аппаратом для построения и анализа метода;
- МКЭ является гибким в в алгоритмизации; интегрирован во многие системы компьютерной математики и САПР;
- МКЭ численно эффективен для решения задач с большим числом неизвестных $\approx 10^9$.

Процесс решения задачи математической физики с использованием метода конечных элементов обычно проходит пять основных этапов:

1. Препроцессинг: построение вариационной (интегральной, слабой) формулировки задачи математической физики с целью ослабления требований гладкости для функции решения; определение функционального пространства для неизвестной функции решения; исследование вопроса существования и единственности решения задачи в вариационной формулировке.
2. Разбиение расчетной области задачи на конечное количество простых подобластей (элементов), таких как, например, треугольники, четырехугольники в двумерном случае или тетраэдры, гексаэдры в трехмерном случае (на сегодняшний день этот этап выполняется автоматически генераторами сеток); определение базисных функций конечномерного пространтсва на основе разбиения области для представления неизвестной функции решения задачи.
3. Аппроксимация неизвестной функции решения с помощью базисных функций из Этапа 2; переход от вариационных уравнений к конечномерной системе алгебраических уравнений.
4. Решение полученной системы алгебраических уравнений. В результате имеем аппроксимацию функции решения исходной задачи.
5. Постпроцессинг: Исследование точности полученного решения, визуалиация решения и др.

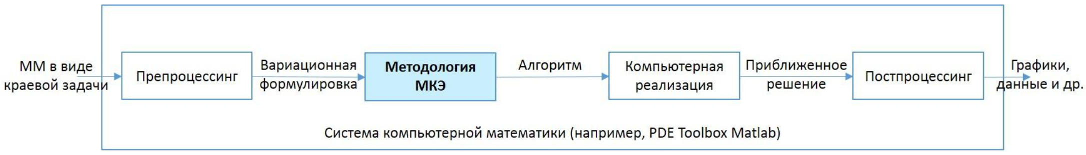


Рис. 1: Интеграция метода конечных элементов в систему компьютерной математики.

Математическое исследование метода конечных элементов базируется на вариационной (интегральной) формулировке задачи математической физики (Тема 2). Решение вариационной задачи ищется в функциональном пространстве специального вида (пространства Соболева) (Тема 3). Исследование вопроса существования и единственности решения вариационной задачи представлено в Теме 4. Разбиение расчетной области задачи на геометрические элементы позволяет сформулировать вариационную задачу в конечномерном пространстве, специальный выбор которого и определяет метод конечных элементов (Тема 5). Построению системы алгебраических уравнений, соответствующих МКЭ, посвящена Тема 6. Вопросы сходимости метода конечных элементов обсуждаются в Темах 7 и 8.

Математическим аппаратом для исследования МКЭ является нелинейный анализ (нелинейные функционалы и нелинейные операторы в бесконечномерных пространствах, вариационное исчисление).

## 1.1 Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

Дифференциальные уравнения с частными производными разделяются на несколько типов. В случае линейных дифференциальных уравнений второго порядка это эллиптические, гиперболические и параболические уравнения. Теория и численное моделирование для трех типов уравнений очень различаются. Для численного решения эллиптических задач применяются конечно-разностные методы и вариационные методы. К последним относится метод конечных элементов. Основным применением метода конечных элементов является численное решение уравнений эллиптического типа.

Линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с $n$ переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ запишем в следующем виде

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, функция $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, функции $a_{ij}(\mathbf{x})$, $b_i(\mathbf{x})$, $c(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})$ являются заданными. В случае, когда $a_{ij} = const$, $b_i = const$ и $c = const$, имеем дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для дважды непрерывно-дифференцируемой функции $u(\mathbf{x})$ справедливо, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, следовательно имеем свойство симметрии для коэффициентов при вторых производных $a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x})$ и соответствующая $n \times n$-матрица

$$A(\mathbf{x}) := (a_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^{n}$$

является симметрической.

**Определение 1.1.** Уравнение (1) называется **эллиптическим** в точке $\mathbf{x}$, если $A(\mathbf{x})$ положительно определенная матрица.

Уравнение (1) называется **гиперболическим** в точке $\mathbf{x}$, если $A(\mathbf{x})$ имеет одно отрицательное собственное значение и $(n-1)$ положительных собственных значений.

Уравнение (1) называется **параболическим** в точке $\mathbf{x}$, если $A(\mathbf{x})$ положительно полуопределенная матрица и ранг расширенной матрицы $(A(\mathbf{x}), b(\mathbf{x}))$ равен $n$.

Уравнение (1) называется эллиптическим, гиперболическим или параболическим во всей области, когда для всех точек области выполняются соответствующие условия.

*Замечание* 1.1 (Критерий Сильвестра). Для того, чтобы действительная симметрическая матрица была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры были положительными.

*Замечание* 1.2. Действительная симметрическая матрица является положительно определенной в том и только в том случае, если все собственные значения матрицы положительны.

В эллиптическом случае количество переменных уравнения (1) $n$ совпадает с размерностью области решения задачи $d$, т.е. $n = d$, и уравнение (1) записывается в виде

$$Lu(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad L := -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}) \tag{2}$$

где $L$ обозначает эллиптический дифференциальной оператор второго порядка. Слагаемое $-\sum a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ является главной частью оператора $L$. У гиперболических и параболических задач одна переменная отличается от других переменных. Как правило, это временная переменная $t$ и количество переменных уравнения $n = d+1$. Гиперболическое уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + Lu(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t),$$

а параболическое уравнение формулируется как

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + Lu(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t).$$

Дифференциальное уравнение эллиптического типа вида (2) в области $\Omega$ вместе с граничными условиями на границе области $\partial\Omega$ называется **краевой задачей**. В общем случае краевой задачей является дифференциальное уравнение вместе с соответствующими краевыми условиями (начальными условиями и граничными условиями).

*Выполните Задание 1.1 для определения области эллиптичности заданного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка.*

## 1.2 Основные уравнения математической физики

Уравнения, описывающие математические модели физических явлений, называются уравнениями математической физики. К классическим уравнениям математической физики относятся уравнение Пуассона, уравнение колебаний и уравнение теплопроводности.

Многие явления физики и механики (гидро- и газодинамики, упругости, электродинамики, оптики, теории переноса, физики плазмы, квантовой физики, терии гравитации и т.д.) описываются краевыми задачами для дифференциальных уравнений.

### 1.2.1 Уравнение Пуассона

Уравнение Пуассона является примером эллиптического дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. Пусть $\Omega$ ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Необходимо найти функцию $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению

$$-\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{3}$$

для заданной функции $f(\mathbf{x})$. Дифференциальный оператор в уравнении (3) называется оператором Лапласа

$$\Delta := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad L = -\Delta.$$

Отметим, что $\Delta = \nabla \cdot \nabla$. В случае, когда $f(\mathbf{x}) = 0$, уравнение Пуассона называется уравнением Лапласа или потенциальным уравнением.

*Выполните Задание 1.2 и Задание 1.3, в которых необходимо применить дифференциальные операторы градиента и Лапласа к заданным функциям.*

Для дифференциального уравнения (3) необходимо задание граничных условий. В общем случае граничное условие имеет вид

$$k(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} + h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$, $k(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ заданные функции на границе области. В частности, можно сформулировать следующие условия: **условие Дирихле** (граничное условие первого рода)

$$u(\mathbf{x}) = g_D(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega;$$

**условие Неймана** (граничное условие второго рода)

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = g_N(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Если граничные условия различаются на частях границы области, то краевая задача называется смешанной. Например,

$$u(\mathbf{x}) = g_D(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = g_N(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N,$$

где $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N \neq \emptyset$.

Для полноты формулировки кроме уравнения и граничных условий необходимо указывать регулярность заданных функций $f(\mathbf{x}), k(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$ и регулярность границы области задачи $\partial\Omega$. Например, если функция $f(\mathbf{x}) \in C^0(\Omega)$, тогда решение $u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega)$. Для границы области $\partial\Omega$ можно, например, определить $C^2$-регулярность, т.е. кривизна является непрерывной функцией криволинейных координат, описывающих границу.

Возможные физические интерпретации уравнения (3):

- $u(\mathbf{x})$ — потенциал электростатического поля, $f(\mathbf{x})$ — объемная плотность зарядов;
- $u(\mathbf{x})$ — отклонение тонкой мембраны, $f(\mathbf{x})$ — стационарная нагрузка;
- $u(\mathbf{x})$ — стационарное распределение температуры, $f(\mathbf{x})$ — плотность теплового источника тепла внутри тела;
- $u(\mathbf{x})$ — стационарное распределение концентрации вещества, $f(\mathbf{x})$ — плотность источника вещества;
- $u(\mathbf{x})$ — потенциал скорости в случае стационарного течения несжимаемой жидкости.

### 1.2.2 Уравнение колебаний

Примером гиперболического дифференциального уравнения является уравнение колебаний

$$\rho(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - \nabla\cdot(p(\mathbf{x},t)\nabla u(\mathbf{x},t)) - q(\mathbf{x},t)u(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t)$$

для неизвестной функции $u(\mathbf{x},t) : \mathbb{R}^d \times [t_0, t_{end}] \to \mathbb{R}$. Заданные коэффициенты $\rho(\mathbf{x},t)$, $p(\mathbf{x},t)$, $q(\mathbf{x},t)$ опрделеяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; $f(\mathbf{x},t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения. К физическим процессам, описание которых осуществлятся с помощью волнового уравнения, относятся колебание струны, мембраны, стержня, трехмерных объемов и распространение звуковых и электромагнитных волн.

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса колебаний необходимо дополнительно задать величины смещения и скорости в начальный момент времени (начальные условия) и условия на границе области (граничные условия). Имеем начальные условия

$$u(\mathbf{x},t)|_{t=t_0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t)|_{t=t_0} = u_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega$$

и граничное условие вида

$$k(\mathbf{x},t)\frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial n} + h(\mathbf{x},t)u(\mathbf{x},t) = g(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega, \quad t > t_0$$

для заданных функций $k(\mathbf{x},t)$, $h(\mathbf{x},t)$ и $g(\mathbf{x},t)$ на границе области.

### 1.2.3 Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности является примером параболического дифференциального уравнения. Пусть $u(\mathbf{x},t) : \mathbb{R}^d \times [t_0, t_{end}] \to \mathbb{R}$ распределение температуры в теле. Изменение энергии в элементе объема определяется тепловым потоком через поверхность тела, а также интенсивностью тепла внутри тела $f(\mathbf{x},t)$. В простейшем случае уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial t} - a\Delta u(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t),$$

где $a := k/(c\rho) = const$ для постоянных значений коэффициента теплопроводности $k$, удельной теплоемкости среды $c$ и плотности $\rho$. Для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальное распределение температуры в среде (начальное условие)

$$u(\mathbf{x},t)|_{t=t_0} = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}\in\Omega$$

и режим на границе среды (граничное условие) вида

$$k(\mathbf{x},t)\frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial n} + h(\mathbf{x},t)u(\mathbf{x},t) = g(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > t_0$$

для заданных функций $k(\mathbf{x},t)$, $h(\mathbf{x},t)$ и $g(\mathbf{x},t)$ на границе области.

## Задания

**Задание 1.1** (теория)**.** Найти область эллиптичности заданного уравнения, т.е. найти такие значения для $a, x, y \in \mathbb{R}$, при которых заданное уравнение будет эллиптическим?

1. $(1+x^2)u_{xx} - 3xyu_{xy} + \frac{1+y^2}{2}u_{yy} = 0$,
2. $u_{xx} + \frac{\cos(x+y)}{4}u_{xy} + \frac{1}{2}u_{yy} = 0$,
3. $-4u_{xx} + 2au_{xy} - u_{yy} = 0$,
4. $-u_{xx} + 2xu_{xy} - 5u_{yy} = axu_x$,
5. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$,
6. $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$,
7. $u_{xx} - yu_{yy} = 0$,
8. $x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} = 0$,
9. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} = 0$,
10. $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$,
11. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$,
12. $u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} + (2-\cos(x)^2)u_{yy} = 0$.

**Задание 1.2** (теория)**.** Для функции $u(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вычислить $\nabla u, \Delta u$. Вычислите скорость изменения функции $u(x,y)$ в точке $(1,1)$ в направлении $\mathbf{i} = (2,0)^T$ и $\mathbf{j} = (0,3)^T$.

1. $u(x,y) = \sin(x)/(y-2)$,
2. $u(x,y) = x^2 + y^4$,
3. $u(x,y) = \exp(x)y$,
4. $u(x,y) = x^{10} + \cos y$,
5. $u(x,y) = \exp(y)/(x^2+1)$,
6. $u(x,y) = \sinh(x)/(x+1)$,
7. $u(x,y) = \cos(xy)$
8. $u(x,y) = x^{y+1}$,
9. $u(x,y) = \ln(x+y+1)$,
10. $u(x,y) = 2x + 3y$.

**Задание 1.3** (теория). Для функции $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, u(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ вычислить $\nabla u, \Delta u$.

**Задание 1.4** (практика). PDE (Partial Differential Equation) Toolbox системы Matlab позволяет решать задачи математической физики методом конечных элементов. Задачи описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка в двумерной и трехмерной (с версии Matlab R2015a) расчетной области. Работа с PDE Toolbox возможна средствами GUI, вызов осуществляется командой pdetool. GUI PDE Toolbox предоставляет средства для описания уравнений (*меню PDE*), задания граничных и начальных условий (*меню Boundary*), задания области при помощи примитивов (*меню Draw*) и операций над множествами (*Set Formula*), генерации и визуализации сеток в области задачи (*меню Mesh*), визуализации результата (*меню Plot*).

Используя справочную систему PDE Toolbox (Matlab R2020a) изучить примеры решения следующих задач: уравнение Пуассона в круге (*Help/PDE Toolbox/Getting Started/Solve 2-D PDEs Using the PDE Modeler App*) и уравнение Пуассона в области сложной формы (*Help/PDE Toolbox/Getting Started/Poisson's Equation with Complex 2-D Geometry: PDE Modeler App*).

**Задание 1.5** (практика).

1. Для заданного точного решения $u(x, y)$ из Задания 1.2 построить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$
$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = g_D(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$
Решить построенную задачу средствами GUI PDE Toolbox и сравнить визуально точное решение $u(x, y)$ с численным решением, полученным методом конечных элементов.

2. Для заданного точного решения $u(x, y)$ из Задания 1.2 построить смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона в единичном квадрате $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$
$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = g_D(x,y), & (x,y) \in \Gamma_D \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = g_N(x,y), & (x,y) \in \Gamma_N, \end{cases}$$
где $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N \neq \emptyset$. Решить построенную задачу средствами GUI PDE Toolbox и сравнить визуально точное решение $u(x, y)$ с численным решением, полученным методом конечных элементов.

3. Для заданного точного решения $u(x, y)$ из Задания 1.2 построить задачу Неймана для уравнения Пуассона в единичном квадрате $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$
$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = g_N(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$
Решить построенную задачу средствами GUI PDE Toolbox и сравнить визуально точное решение $u(x, y)$ с численным решением, полученным методом конечных элементов. Обратите внимание на качество полученного численного решения.

**Задание 1.6** (практика). Решите указанную краевую задачу аналитически (например, с помощью интеграла Пуассона для функции решения в полярных координатах) и численно. Осуществите визуальное сравнение полученных решений
$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) = 1, & x^2 + y^2 = 1, y \geq 0 \\ u(x,y) = -1, & x^2 + y^2 = 1, y < 0. \end{cases}$$

**Задание 1.7** (практика). Осуществите реализацию задания 1.5 с использованием пакета FEniCS на Python.

## Список литературы


[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994, 2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.