1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

4 Существование единственного решения вариационной задачи

5 Метод Галеркина. Пространство конечных элементов

6 Поэлементное построение дискретной задачи для пространства P_1-элементов

7 Сходимость метода конечных элементов. Априорные оценки ошибки

7.1 Сходимость. Лемма Сеа

Предположим, что необходимо найти решение $u \in V$ вариационной задачи,

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{1}$$

которая построена для некоторой эллиптической краевой задачи второго порядка в области Ω. Полагаем, что вариационная задача (1) удовлетворяет условиям леммы Лакса-Мильграма для ее однозначной разрешимости. Рассмотрим семейство пространств конечных элементов $V_h \subset V$ гильбертова пространства V, где параметр дискретизации $h > 0$ (максимальный диаметр элементов разбиения области Ω) является определяющим параметром пространств конечных элементов. Для каждого пространства V_h строится дискретное решение $u_h \in V_h$ соответствующей дискретной задачи

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2}$$

Говорят, что семейство дискретных задач вида (2) сходится или имеет место **сходимость**, если

$$\lim_{h \to 0} ||u - u_h||_V = 0,$$

где u является решением вариационной задачи (1), u_h — решением дискретной задачи (2).

Априорные оценки ошибки $(u - u_h)$ метода конечных элементов — это асимптотические утверждения о скорости сходимости ошибки при стремлении параметра дискретизации h к нулю, построенные на основании свойств решения $u \in V$ исходной вариационной задачи (1). В априорных оценках информация о свойствах дискретного решения $u_h \in V_h$ не используется. В качестве меры ошибки выбирается подходящая норма ошибки $||u - u_h||$, например, норма в пространстве $L_2(\Omega)$ или $H^1(\Omega)$ или $L_\infty(\Omega)$. Априорная оценка не оценивает ошибку $(u - u_h)$ на фиксированной сетке расчетной области, а показывает, насколько ожидается выигрыш по точности при уменьшении значения параметра дискретизации h, что соответствует измельчению сетки.

Метод конечных элементов имеет **порядок сходимости** ℓ или имеет место сходимость $O(h^\ell)$ в норме некоторого пространства V, если для малого значения параметра h существует константа C, не зависящая от h, что справедливо

$$||u - u_h||_V \leq Ch^\ell \quad \text{или } ||u - u_h||_V = O(h^\ell).$$

Порядок сходимости указывает скорость сходимости по мере измельчения сетки. Отметим, что информация о наилучшем (оптимальном) порядке сходимости ℓ метода конечных элементов часто известна, тогда как количественные оценки константы C имеются только в специальных случаях. Следующие факторы играют важную роль при определении величины порядка сходимости ℓ и константы C в априорной оценке ошибки:

1. свойство гладкости точного решения $u \in H^\alpha$;

2. тип конечных элементов пространств V_h, в частности, степень многочлена k для определения базисных функций конечного элемента;

3. норма, в которой оценивается ошибка, например, L_2-норма или H^1-норма или L_∞-норма;

4. тип элементов разбиения области (например, треугольники или четырехугольники в 2D);

5. квадратурные (кубатурные) формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов в билинейной и линейной формах вариационной задачи (1);

6. способ аппроксимации искривленных границ области Ω.

В дальнейшем полагаем, что сетка состоит из треугольных элементов (п.4), интегралы для вариационной задачи вычисляются точно (п.5), область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является ограниченным многоугольником (п.6). Тогда априорная оценка ошибки зависит от гладкости точного решения $u \in H^\alpha$ (п.1), степени k полиномиальной аппроксимации метода конечных элементов (п.2) и нормы, в которой оценивается ошибка (п.3).

Следующая лемма показывает, что задача сходимости сводится к задаче аппроксимации.

Лемма 7.1 (Сеа). *Пусть билинейная форма $a : V \times V \to R$ является непрерывной и эллиптической в V*

$$|a(u,v)| \le C||u||_V||v||_V \quad \forall u,v \in V,$$
$$a(v,v) \ge \alpha||v||_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Пусть u является решением вариационной задачи:

$$\textit{Найти } u \in V, \textit{ где } \quad a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V;$$

u_h является дискретным решением в $V_h \subset V$:

$$\textit{Найти } u_h \in V_h, \textit{ где } \quad a(u_h,v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Тогда справедлива оценка

$$||u-u_h||_V \le \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} ||u-v_h||_V. \tag{3}$$

Доказательство. Так как $v_h \in V_h$ и $V_h \subset V$, следовательно $v_h \in V$ и выполняется

$$a(u,v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Разность вариационных уравнений, записанных для функций $v_h \in V_h$, приводит к соотношению

$$a(u-u_h,v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4}$$

Полученное соотношение характеризует **ортогональность ошибки** $(u - u_h)$ метода Галеркина подпространству V_h относительно скалярного произведения, заданного билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим билинейную форму от ошибки

$$\begin{aligned} a(u-u_h, u-u_h) &= a(u-u_h, u-v_h+v_h-u_h) \\ &= a(u-u_h, u-v_h) + a(u-u_h, v_h-u_h) \\ &= a(u-u_h, u-v_h) \leq C||u-u_h||_V ||u-v_h||_V. \end{aligned}$$

Последнее соотношение справедливо для произвольной функции $v_h \in V_h$. В силу эллиптичности билинейной формы имеем, что

$$a(u-u_h, u-u_h) \geq \alpha ||u-u_h||_V^2.$$

Тогда

$$||u-u_h||_V \leq \frac{C}{\alpha} ||u-v_h||_V \quad \forall v_h \in V_h.$$

В силу произвольности выбора v_h полученная оценка справедлива также для минимальной вариации по всем функция пространства V_h

$$||u-u_h||_V \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} ||u-v_h||_V.$$

Теорема доказана. □

Замечание 7.1. Отметим, что константа C/α определяется вариационной задачей и не зависит от выбора подпространства V_h.

Замечание 7.2. По определению для сходимости метода конечных элементов необходимо выполнение условия

$$\lim_{h \to 0} ||u-u_h||_V = 0.$$

Согласно Лемме Сеа **достаточным условие сходимости метода конечных элементов** является существование семейства подпространств (V_h) пространства V такого, что

$$\lim_{h \to 0} \inf_{v_h \in V_h} ||u-v_h||_V = 0.$$

Замечание 7.3. Лемма Сеа показывает, что расстояние между решением вариационной задачи u и решением дискретной задачи u_h оценивается минимальным расстоянием между u и всеми элементами из V_h с точностью до множителя C/α. Задача оценивания ошибки $||u-u_h||_V$ сводится к задаче теории аппроксимации: вычислить расстояние $d(u, V_h) = \inf\limits_{v_h \in V_h} ||u-v_h||_V$ между функцией $u \in V$ и подпространством $V_h \subset V$ или норму разности между решением u и его проекцией на пространство V_h. Встает вопрос о точности аппроксимации заданной функция u функциями из V_h. В общем случае тяжело получить ошибку аппроксимации $\inf\limits_{v_h \in V_h} ||u-v_h||_V$, поэтому ошибка аппроксимации заменяется ошибкой интерполяции: Пусть $I_h u \in V_h$ интерполянт решения u, тогда

$$\inf_{v_h \in V_h} ||u-v_h||_V \leq ||u-I_h u||_V.$$

7.2 Оценка ошибки интерполяции для треугольного разбиения области

Рассмотрим случай локальной линейной интерполяции заданной функции u на треугольнике T по значениям в вершинах треугольника a_i, $i = \overline{1,3}$

$$I_T u(\xi) = \sum_{i=1}^{3} u(a_i)\lambda_i(\xi) \quad \xi \in T$$

для барицентрических координат $\lambda_i(\xi)$ относительно T.

Лемма 7.2. *Для произвольной функции $u \in H^2(T)$ ошибка интерполяции $(u - I_T u)$ для линейного интерполянта $I_T u$ с $I_T u(a_i) = u(a_i)$ на треугольнике T удовлетворяет следующей оценке*

$$||u - I_T u||_{0,T} \le C_1 h_T^2 ||u||_{2,T}, \quad ||u - I_T u||_{1,T} \le C_2 h_T ||u||_{2,T}$$

с константами C_1 и C_2, независимыми от диаметра треугольника h_T.

Данную оценку ошибки интерполяции можно обобщить на случай интерполяции функции $u \in H^2(\Omega)$ кусочно-линейной функцией, соответствующей разбиению области Ω на треугольники.

Теорема 7.1. *Пусть $h = \max\limits_{T \in T_h} h_T$ максимальный диаметр треугольников разбиения T_h. Тогда при условии, что $u \in H^2(\Omega)$, для ошибки кусочно-линейной интерполяции на области Ω справедливо*

$$||u - I_h u||_0 \le C_1 h^2 ||u||_2, \quad ||u - I_h u||_1 \le C_2 h ||u||_2,$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от h.

Приведем результат обобщения на случай кусочной интерполяции функции u многочленами степени k на области Ω.

Теорема 7.2. *Пусть $h = \max\limits_{T \in T_h} h_T$ максимальный диаметр всех треугольников квази-однородной триангуляции. Тогда при условии $u \in H^{k+1}(\Omega)$ для ошибки интерполяции многочленами степени k на каждом треугольном элементе имеем, что*

$$||u - I_h u||_m \le C h^{k+1-m} ||u||_{k+1}, \quad 0 \le m \le k+1$$

где константа $C = C(\Omega, k)$.

Вид интерполирующей функции $I_h u$ определяется типом используемой конечноэлементной аппроксимации. При этом предполагается, что все узловые параметры интерполяции определены точно. Разбиение называется квази-однородным, если существует $\sigma = const > 0$, что

$$\frac{h_T}{\rho_T} \le \sigma \quad \forall T \in T_h,$$

где h_T — диаметр треугольника (максимальное расстояние между двумя точками треугольника), ρ_T диаметр окружности, вписанной в T.

7.3 Априорная оценка ошибки в H^1-норме

Для случая $u \in V = H^1(\Omega)$ справедлива оценка из Леммы Сеа

$$||u - u_h||_1 \le \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_1.$$

Из теоремы 7.2, в частности, следует, что априорная оценка ошибки при $m = 1$ для метода конечных элементов k-го порядка (локальный порядок точности аппроксимации конечными элементами) на треугольной сетке имеет вид

$$||u - u_h||_1 \leq \frac{C}{\alpha}||u - I_h u||_1 \leq Ch^k||u||_{k+1}$$

при условии, что $u \in H^{k+1}(\Omega)$. В частности, ошибка линейного метода конечных элементов на треугольной сетке в норме пространства $H^1(\Omega)$ имеет первый порядок сходимости при условии $u \in H^2(\Omega)$. Построенная априорная оценка справедлива для случая аналитического вычисления интегралов (п.5) и многоугольной области при точном согласовании граничных условий (п.6).

Замечание 7.4. Следует отметить, что хотя построенная оценка не является наилучшей, тем не менее обычно можно показать, что она наилучшая по порядку сходимости. Другими словами, оценка не может быть улучшена заменой интерполянта функции u на ее проекцию.

Замечание 7.5. Оценка ошибки принимает вид

$$||u - u_h||_1 \leq \frac{C}{\alpha}||u - I_h u||_1 \leq Ch^k||u||_{k+1} + \Delta,$$

где величина добавочного члена Δ определяется типом аппроксимации граничных условий и/или способом аппроксимации криволинейных границ и/или численным интегрированием. Сходимость имеет место, если величина возмущения есть $O(h^s)$, $s > 0$. Измененная возмущением аппроксимация называется оптимальной, если порождаемая возмущением ошибка есть $O(h^k)$, т.е. имеет место тот же порядок малости, что и ошибка интерполяции.

Замечание 7.6. Область применимости построенной оценки ограничена, так как интерполянт решения u определен только в предположении достаточной гладкости решения $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Если решение u не является столь гладким, то показатель степени у h в оценке ошибки уменьшается так, что при $u \in H^{k^*+1}(\Omega)$ и $k^* \leq k$ имеем

$$||u - u_h||_1 \leq \frac{C}{\alpha}||u - I_h u||_1 \leq Ch^{k^*}||u||_{k^*+1}.$$

Если решение u краевой задачи не очень гладкое, то использование многочленов высокой степени не улучшает качество аппроксимации. Аналогичный вывод чисто экспериментальным способом был получен инженерами, которые редко используют многочлены степени ≥ 4 для аппроксимации решения краевых задач второго порядка.

7.4 Априорная оценка ошибки в L_2-норме

Теорема 7.2 об оценке ошибки интерполяции позволяет предположить, что для ошибки линейного метода конечных элементов в L_2-норме справедлива оценка вида

$$||u - u_h||_0 \leq Ch^2||u||_2$$

со вторым порядком сходимости. Для доказательства данного утверждения используется **двойственный прием** или **прием Нитше**.

Для демонстрации двойственного приема рассмотрим частный случай однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в выпуклой области Ω

$$-\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Пусть функция z является решением вспомогательной задачи

$$-\Delta z = u - u_h \quad \text{в } \Omega, \quad z = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Тогда справедливо

$$||u - u_h||_0^2 = \int_\Omega (u - u_h)^2 d\xi = -\int_\Omega (u - u_h)\Delta z d\xi.$$

Применим формулу интегрирования по частям

$$||u - u_h||_0^2 = \int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla z d\xi - \int_{\partial\Omega} (u - u_h)\frac{\partial z}{\partial n} d\xi = \int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla z d\xi.$$

Далее воспользуемся свойством ортогональности ошибки метода Галеркина

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Для рассматриваемой задачи имеем, что

$$\int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v_h d\xi = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Пусть $I_h z$ является линейным интерполянтом функции z по значениям в узлах сетки. Полагаем $v_h = I_h z$ и из выражения для $||u - u_h||_0^2$ вычитаем соотношение ортогональности ошибки

$$||u - u_h||_0^2 = \int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(z - I_h z) d\xi.$$

Далее неравенство Коши-Шварца приводит к оценке

$$||u - u_h||_0^2 \le |u - u_h|_1 |z - I_h z|_1,$$

которая может быть ослаблена переходом к H^1-норме в правой части

$$||u - u_h||_0^2 \le ||u - u_h||_1 ||z - I_h z||_1.$$

Далее учитывается полученная оценка ошибки в H^1-норме

$$||u - u_h||_1 \le Ch||u||_2,$$

и оценка ошибки интерполяции, согласно Теореме 7.2,

$$||z - I_h z||_1 \le Ch||z||_2.$$

В результате имеем, что

$$||u - u_h||_0^2 \le Ch^2 ||u||_2 ||z||_2.$$

Согласно формулировке вспомогательной задачи функция z зависит от ошибки $u - u_h$. В теории эллиптических дифференциальных уравнений известно, что решение однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в выпуклой области принадлежит пространству $H^2(\Omega)$, при этом справедлива оценка

$$||z||_2 \le C||u - u_h||_0.$$

Таким образом, получаем оценку ошибки в L_2-норме в виде

$$||u - u_h||_0 \le Ch^2 ||u||_2.$$

В случае невыпуклых областей или более сложных граничных условий второй порядок сходимости в L_2-норме не является гарантированным.

Задания

Задание 7.1 (практика). Необходимо построить конечно-элементное решение для задачи Дирихле в единичном квадрате из Задания 1.5 на четырех последовательных сетках (равномерное разбиение при переходе от сетки к сетке) с использованием линейных треугольных элементов и вычислить экспериментальные порядки сходимости в L_2-норме и H^1-норме.

1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & (x,y) \in \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g_D, & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Для заданного точного решения $u(x,y)$ из Задания 1.2 (по вариантам) постройте задачу Дирихле и решите задачу с помощью метода конечных элементов на четырех последовательных сетках (равномерное разбиение при переходе от сетки к сетке). При реализации средствами GUI PDEToolbox Matlab будем иметь конечно-элементные решения uh_i на соответствующих сетках T_i, описанных массивами $(p_i, e_i, t_i), i = \overline{1,4}$.

2. Введем обозначение для функции ошибки на сетке T_i

$$e_i := u - uh_i \quad i = \overline{1,4}.$$

Полагаем, что H^m-норма ошибки на первой сетке e_1 удовлетворяет соотношению

$$||e_1||_m = Ch_1^r$$

для некоторой константы C и порядка сходимости r метода конечных элементов, где h_1 обозначает максимальную длину стороны треугольника сетки T_1. Так как сетка T_2 строится равномерным разбиением сетки T_1, то для функции ошибки на второй сетке выполняется

$$||e_2||_m = C\left(\frac{h_1}{2}\right)^r.$$

Разделим первую ошибку на вторую и получим формулу для вычисления экспериментального порядка сходимости r_{12} при переходе от первой сетки ко второй

$$\frac{||e_1||_m}{||e_2||_m} = 2^r \quad \Rightarrow \quad r_{12} = \log_2 \frac{||e_1||_m}{||e_2||_m}.$$

Аналогичным образом вычисляется экспериментальный порядок сходимости r_{23} при переходе от второй сетки к третьей

$$r_{23} = \log_2 \frac{||e_2||_m}{||e_3||_m}.$$

Экспериментальные порядки сходимости r_{12}, r_{23}, r_{34}, необходимо вычислить в L_2-норме $(m=0)$ и H^1-норме $(m=1)$.

- Вычисление L_2-нормы $(m=0)$ ошибки осуществляется по формуле

$$||e_i||_0 = \left[\int_\Omega (u - uh_i)^2 dxdy\right]^{1/2}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Для приближенного вычисления интеграла воспользуемся кубатурной формулой средних

$$||e_i||_0 \approx l2error_i := sqrt(sum(area. * (mu - mu_i).^2)) \quad i = \overline{1,4},$$

где $area$ обозначает вектор площадей треугольников сетки T_i, mu — вектор значений функции u в серединах треугольных элементов сетки, mu_i — вектор значений конечно-элементного решения uh_i в серединах треугольных элеементов. Для вычисления $area$ можно использовать встроенную функцию $pdetrg(p_i, t_i)$, для вычисления mu_i — встроенную функцию $pdeintrp(p_i, t_i, u_i)$.

- Вычисление H^1-нормы ($m = 1$) ошибки осуществляется по формуле

$$||e_i||_1 = \left[\int_\Omega \left((u - uh_i)^2 + \nabla(u - uh_i)^2\right) dxdy\right]^{1/2} \quad i = \overline{1,4}.$$

Для приближенного вычисления интеграла воспользуемся кубатурной формулой средних и результатом вычисления L_2-нормы ошибки

$$||e_i||_1 \approx h1error_i := sqrt(l2error_i^2 + sum(area.*\left((mux - mux_i).^2) + (muy - muy_i).^2)\right)),$$

где $i = \overline{1,4}$, mux, muy — вектора значений первых производных по x и по y точного решения u в серединах треугольных элементов сетки T_i, mux_i, muy_i — вектора значений первых производных конечно-элементного решения uh_i в серединах треугольных элементов. Для вычисления mux_i, muy_i можно использовать встроенную функцию $pdegrad(p_i, t_i, u_i)$.

3. Сравните полученные экспериментальные порядки сходимости r_{12}, r_{23}, r_{34}, посчитанные в L_2- и H^1-норме, с теоретическими результатами.

   Для линейных элементов ($k = 1$) при достаточной гладкости точного решения $u \in H^{k+1}$ ошибка $(u - u_h)$ имеет первый порядок сходимости в H^1-норме и второй порядок сходимости в L_2-норме

$$||u - u_h||_1 = O(h), \quad ||u - u_h||_0 = O(h^2).$$

4. Экспериментальные порядки сходимости метода конечных элементов можно считать, когда точное решение задачи неизвестно. Тогда

$$r_{123} = \log_2 \frac{||uh_1^{(T_1)} - uh_2^{(T_1)}||_m}{||uh_2^{(T_1)} - uh_3^{(T_1)}||_m}, \quad r_{234} = \log_2 \frac{||uh_2^{(T_2)} - uh_3^{(T_2)}||_m}{||uh_3^{(T_2)} - uh_4^{(T_2)}||_m},$$

   где $uh_i^{(T_j)}$ соответствует интерполяции дискретного решения uh_i на сетку T_j.

   Посчитайте порядки сходимости, не используя информацию о точном решении, и сравните с теоретическими результатами о порядке сходимости.

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.