1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

4 Существование и единственность решения вариационной задачи

Определение 4.1. Пусть H — гильбертово пространство. Линейная форма $l(v) : H \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной**, если $\exists\, C = const > 0$, что

$$|l(v)| \leq C||v||_H \quad \forall v \in H.$$

Билинейная форма $a : H \times H \to \mathbb{R}$ называется непрерывной, если $\exists\, C = const > 0$, что

$$|a(u, v)| \leq C||u||_H||v||_H \quad \forall u, v \in H.$$

Определение 4.2. Пусть H — гильбертово пространство. Билинейная форма называется эллиптической (H-эллиптической), если $\exists\, \alpha = const > 0$, что

$$a(u, u) \geq \alpha||u||_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Эллиптическая билинейная форма порождает **энергетическую норму** в пространстве H

$$||u||_a := \sqrt{a(u, u)}.$$

Энергетическая норма, порожденная непрерывной эллиптической билинейной формой, эквивалентна норме пространства H

$$\sqrt{\alpha}||u||_H \leq ||u||_a \leq \sqrt{C}||u||_H.$$

Лемма 4.1 (Лакса-Мильграма о существовании единственного решения)**.** *Пусть V — замкнутое выпуклое подпространство гильбертова пространства H и $a : H \times H \to \mathbb{R}$ — непрерывная эллиптическая билинейная форма. Тогда $\forall l \in H'$, где H' — пространство непрерывных линейных функционалов на H, задача минимизации*

$$\min\left\{\frac{1}{2}a(v, v) - l(v) \ : \ v \in V\right\}$$

имеет единственное решение.

Замечание 4.1. В случае, когда $V = H$, выполнение условий леммы Лакса-Мильграма 4.1 гарантирует существование единственного решения $u \in V$ вариационных уравнений

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

для каждого $l \in V'$. В частном случае, когда $a(u, v) = (u, v)_0$, билинейная форма является непрерывной и эллиптичной, следовательно существует единственная функция $u \in V$, что

$$(u, v)_0 = l(v) \quad \forall v \in V$$

для каждого $l \in V'$. Таким образом, построено отображение $V' \to V$, где линейному функционалу $l(v)$ поставлена в соответствие единственная функция u. Построенное отображение называется каноническим представлением функционала.

Замечание 4.2. В Теореме 2.2 сформулированы условия существования единственного решения задачи минимизации в более широком линейном (векторном) пространстве V. Поэтому ограничения на билинейную форму и линейный функционал в Теореме 2.2 и в Лемме Лакса-Мильграма 4.1 отличаются. В частности, для однозначной разрешимости задачи минимизации в линейном пространстве билинейная форма $a(u, v)$ должна быть симметрической и положительной, функционал $l(v)$ линейным.

4.1 Задача Дирихле

Для однородной задачи Дирихле

$$Lu(x) = f(x) \quad x \in \Omega, \tag{1}$$
$$u(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\right) + c(x)u(x),$$

вариационная задача имеет следующий вид (см. подраздел 2.1.1):

Найти $u \in V = \{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ такую, что

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{3}$$

где

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + cuv \right) dx, \tag{4}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv dx. \tag{5}$$

Определение 4.3. Функция $u \in H_0^1(\Omega)$ называется **обобщенным (слабым) решением** однородной задачи Дирихле (1)–(2) если она является решением вариационной задачи (3)–(5) в пространстве $V = H_0^1(\Omega)$.

Обобщенное решение является обобщением понятия классических решений дифференциальных уравнений. Это понятие возникло в связи с многими задачами математической физики, когда под решениями дифференциальных уравнений потребовалось понимать функции, не имеющие достаточного числа производных.

Понятие обобщенного решения не противоречит понятию классического решения.

Теорема 4.1. *Каждое обобщенное решение $u \in H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле (1)–(2), для которого $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, является также классическим решением задачи Дирихле.*

В дальнейшем полагаем, что обобщенное решение любой эллиптической краевой задачи (не только однородной задачи Дирихле) — это решение соответствующей вариационной задачи в некотором гильбертовом пространстве.

Теорема 4.2. *Пусть $V = H_0^1(\Omega)$, $f(x) \in L_2(\Omega)$, $c(x) \geq 0$ и билинейная форма (4) является* **равномерно эллиптической**

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j v \partial_i v \geq \alpha \sum_i (\partial_i v)^2$$

для вариационной задачи (3)–(5). Тогда однородная задача Дирихле (1)–(2) имеет единственное обобщенное решение $u \in H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 необходимо показать, что билинейная форма (4) является непрерывной и эллиптической в $H_0^1(\Omega)$, а линейный функционал (5) является непрерывным в $H_0^1(\Omega)$.

1. Покажем, что билинейная форма (4) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$. Пусть

$$\tilde{c} := \sup\left\{|a_{ij}(x)| \,:\, x \in \Omega, \quad i,j = \overline{1,n}\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v\right) dx\right| &= \left|\sum_{i,k=1}^n \int_\Omega a_{ij}\partial_j u\partial_i v dx\right| \le \sum_{i,k=1}^n \left|\int_\Omega a_{ij}\partial_j u \partial_i v dx\right| \\
&\le \tilde{c}\sum_{i,j=1}^n \left|\int_\Omega \partial_j u \partial_i v dx\right| \overset{\text{н-во Буняковского}}{\rightarrow} \\
&\le \tilde{c}\sum_{i,j=1}^n \left(\int_\Omega (\partial_j u)^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (\partial_i v)^2\, dx\right)^{1/2} \overset{\text{разделение переменных}}{\rightarrow} \\
&= \tilde{c}\sum_{j=1}^n \left(\int_\Omega (\partial_j u)^2\, dx\right)^{1/2} \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega (\partial_i v)^2\, dx\right)^{1/2} \overset{\text{н-во Коши}}{\rightarrow} \\
&\le \tilde{c}\left(\sum_{j=1}^n 1^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^n \int_\Omega (\partial_j u)^2\, dx\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega (\partial_i v)^2\, dx\right)^{1/2} \\
&= \tilde{c}n|u|_1|v|_1.
\end{aligned}$$

$$|a(u,v)| \le \tilde{c}n|u|_1|v|_1 + c||u||_0||v||_0 \overset{\text{н-во Фридрихса}}{\rightarrow} \le \tilde{c}n|u|_1|v|_1 + c|u|_1|v|_1 \le C|u|_1|v|_1.$$

Следовательно билинейная форма (4) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$.

2. Покажем, что билинейная форма (4) является эллиптической в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

$$a(v,v) \ge \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_j v \partial_i v\right) dx \overset{\text{св-во равном. эллипт.}}{\rightarrow} \ge \int_\Omega \left(\alpha \sum_i (\partial_i v)^2\right) dx = \alpha|v|_1^2.$$

Следовательно билинейная форма (4) является эллиптической в $H_0^1(\Omega)$.

3. Покажем непрерывность линейной формы (5) в $H_0^1(\Omega)$.

$$|l(v)| = \left|\int_\Omega fv dx\right| \overset{\text{н-во Буняковского}}{\rightarrow} \le ||f||_0||v||_0 \overset{\text{н-во Фридрихса}}{\rightarrow} \le c|v|_1.$$

Следовательно линейная форма (5) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 однородная задача Дирихле (1)–(2) имеет единственное обобщенное решение в $H_0^1(\Omega)$. Теорема доказана. □

Пример 4.1. Рассмотрим однородную задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x) &= 0 \quad x \in \Omega, \\
u(x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Пусть $V = H_0^1(\Omega)$. Соответствующая билинейная форма

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v \right) dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

является равномерно эллиптической ($\alpha = 1$), $f \equiv 0$, $c = 0$ следовательно однородная задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет единственное обобщенное решение в $H_0^1(\Omega)$. Если $V = H^1(\Omega)$, то свойство эллиптичности для билинейной формы не выполняется, т.к. для $v = const$ имеем, что $a(v,v) = 0$. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 вариационная задача может не быть однозначно разрешимой.

Пример 4.2. Для неоднородной задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^n \partial_i \left(a_{ij}(x) \partial_j u(x) \right) + c(x)u(x) &= f(x) \quad x \in \Omega \\ u(x) &= g_D(x) \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

в подразделе 2.1.2 построена вариационная задача:

Найти $w \in V$ такую, что

$$a(w,v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{6}$$

где

$$a(w,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_j w \partial_i v + cwv \right) dx, \tag{7}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv dx - a(u_0, v). \tag{8}$$

Полагаем $V = H_0^1(\Omega)$ и $u(x) = w(x) + u_0(x) \in U = \{u \,:\, u \in H^1(\Omega), u = g_D \text{ на } \partial\Omega\}$.

Для вариационной задачи в пространстве $V = H_0^1(\Omega)$ применима Теорема 4.2. А именно, для однозначной разрешимости вариационной задачи должны выполняться условия, что $f \in L_2(\Omega)$, $c(x) \geq 0$ и билинейная форма равномерно эллиптическая. Из требования полноты необходимо положить $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.

4.2 Задача Неймана

Для задачи Неймана

$$Lu(x) = f(x) \quad x \in \Omega, \tag{9}$$

$$\sum_{i,j} a_{ij} \partial_j u n_i = g_N(x) \quad x \in \partial\Omega \tag{10}$$

вариационная задача имеет следующий вид (см. подраздел 2.1.3):

Найти $u \in V = \{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})\}$ такую, что

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{11}$$

где

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_j u \partial_i v + cuv \right) dx, \tag{12}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} g_N v ds. \tag{13}$$

Сформулируем результат однозначной разрешимости в обобщенном смысле для задачи Неймана, аналогичный Теореме 4.2.

Теорема 4.3. *Пусть* $V = H^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $g_N \in L_2(\partial\Omega)$, $\underline{c(x) \geq \beta > 0}$ *и билинейная форма (12) является равномерно эллиптической*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j v \partial_i v \geq \alpha \sum_i (\partial_i v)^2$$

для вариационной задачи (11)–(13). Тогда задача Неймана (9)–(10) имеет единственное обобщенное решение в $H^1(\Omega)$, *т.е. единственное решение вариационной задачи (11)–(13) при* $V = H^1(\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 необходимо показать, что билинейная форма (12) является непрерывной и эллиптической в $H^1(\Omega)$, а линейный функционал (13) является непрерывным в $H^1(\Omega)$. При доказательстве Теоремы 4.2 показано, что билинейная форма (12) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$

$$|a(u,v)| \leq C|u|_1|v|_1,$$

следовательно билинейная форма является непрерывной в $H^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} a(v,v) &\geq \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u \partial_i v \right) dx + \beta||v||_0^2 \stackrel{\text{св-во равном. эллипт.}}{\rightarrow} \\ &\geq \alpha \int_\Omega \sum_i (\partial_i v)^2\, dx + \beta||v||_0^2 \geq \min\{\alpha,\beta\}||v||_1^2. \end{aligned}$$

Следовательно билинейная форма (12)является эллиптической в $H^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_\Omega fvdx + \int_{\partial\Omega} gvds \right| \stackrel{\text{н-во Буняковского}}{\rightarrow} \\ &\leq ||f||_0||v||_0 + ||g||_{0,\partial\Omega}||v||_{0,\partial\Omega} \stackrel{\text{н-во Фридрихса, Теорема о следе}}{\rightarrow} \\ &\leq c||v||_1. \end{aligned}$$

Следовательно линейная форма является непрерывной в $H^1(\Omega)$. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 задача Неймана (9)–(10) имеет единственное обобщенное решение в $H^1(\Omega)$. Теорема доказана. □

Пример 4.3. Рассмотрим ситуацию, когда условие $c(x) \geq \beta > 0$ не выполняется, например, $c(x) = 0$. В этом случае нельзя доказать эллиптичность билинейной формы ($a(v,v) = 0$ для $v = const$) и, как следствие, задача Неймана не будет иметь единственное решение в $H^1(\Omega)$.

Пусть задана задача Неймана для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_N(x) \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Соответствующая билинейная форма имеет вид

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad a(v,v) = |v|_1^2.$$

Билинейная форма не является эллиптической в $H^1(\Omega)$. Непосредственно из краевой задачи видно, что решение определяется с точностью до константы. Для того, чтобы вариационная задача имела единственное решение, вместо $H^1(\Omega)$ рассматривается подпространство без констант $H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R} := \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v dx = 0\}$ (функции, ортогональные постоянной функции в $L_2(\Omega)$).

Замечание 4.3. При переходе от краевой задачи к вариационной задаче условие Неймана не влияет на определение функционального пространства тестовых функций, но изменяет вариационные уравнения. Условие Неймана называется **естественным условием** в контексте вариационной постановки. Условие Дирихле влияет на определение функционального пространства и называется **существенным условием**.

4.3 Смешанная краевая задача

Для краевой задачи со смешанными граничными условиями

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x) \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) \quad x \in \Gamma_D, \\ \sum_{i,j} a_{ij}\partial_k u n_i &= g_N(x) \quad x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

в подразделе 2.1.4 построена вариационная задача:

Найти $w \in V$ такую, что

$$a(w,v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{14}$$

где

$$a(w,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j w \partial_i v + cwv \right) dx, \tag{15}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv dx - a(u_0, v) + \int_{\Gamma_N} g_N v ds. \tag{16}$$

Полагаем $V = H^1(\Omega)$ и $u(x) = w(x) + u_0(x) \in U = \{u : u \in H^1(\Omega), u = g_D \text{ на } \Gamma_D\}$.

Аналогично рассуждениям в доказательстве Теоремы 4.3 можно показать, что фунционал (16) является непрерывным. Тогда имеем, что при выполнении условий Теоремы 4.3, краевая задача со смешанными граничными условиями будет иметь единственное решение в пространстве $H^1(\Omega)$.

Задания

Задание 4.1 (теория)**.** Для однородной задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -u'' + \varepsilon u &= f \quad x \in \Omega = (0,1) \\ u &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

исследовать вопрос существования единственного обобщенного решения при различных значениях ε.

Задание 4.2 (теория)**.** Для однородной задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x) \quad x \in \Omega = (0,1) \\ u &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

где $p(x) \in C^1(\Omega), p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \in C(\Omega), q(x) \geq 0, f(x) \in C^2(\Omega)$, построить вариационную формулировку и показать, что задача имеет единственное обобщенное решение в $H_0^1(\Omega)$.

Задание 4.3 (теория)**.** Задана эллиптическая, но не равномерно эллиптическая билинейная форма $a : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$

$$a(u,v) = \int_0^1 x^2 u'v' dx,$$

и функционал

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \int_0^1 v dx.$$

Необходимо построить краевую задачу, соответствующую задаче минимизации функционала, и показать, что решение $u \notin H_0^1(\Omega)$, т.е. $|u|_1$ не существует (соответствующий интеграл расходится).

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.