1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

3.1 Пространство Лебега

Полагаем, что все рассматриваемые функции и векторные пространства определены над полем вещественных чисел. Пусть Ω открытая область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей. **Пространство Лебега** $L_2(\Omega)$ — это пространство классов эквивалентности измеримых функций $u(x) : \Omega \to \mathbb{R}$, квадратично суммируемых на Ω по Лебегу

$$L_2(\Omega) = \{u : \int_\Omega u^2 dx < \infty\}.$$

Приведем некоторые свойства функций из $L_2(\Omega)$.

Свойство 1 (**Скалярное произведение в** $L_2(\Omega)$). *Для функций из* $L_2(\Omega)$ *можно задать скалярное произведение*

$$(u, v)_0 := (u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega uvdx. \tag{1}$$

Величина

$$||u||_0 := \sqrt{(u, u)_0} = \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2} \tag{2}$$

называется нормой для $u \in L_2(\Omega)$. *Индекс нуль указывает на то, что в определении нормы не используются производные от функции.* $L_2(\Omega)$ *— это бесконечномерное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение и выполнена аксиома полноты (гильбертово пространство).*

Свойство 2 (**Неравенство Буняковского в** $L_2(\Omega)$). *В* $L_2(\Omega)$ *выполняется неравенство Буняковского (неравенство Коши-Шварца)*

$$|(u, v)_0| \le ||u||_0 ||v||_0.$$

Аналог неравенства Буняковского для конечных сумм называется неравенством Коши. Неравенство Буняковского является частным случаем неравенства Гельдера для интегралов

$$|(u, v)_0| \le ||u||_{L_p} ||v||_{L_q}$$

для $u \in L_p(\Omega), v \in L_q(\Omega)$, *где* $1 \le p, q < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1$.

Свойство 3 (**Неравенство Минковского**). *В* $L_2(\Omega)$ *выполняется неравенство Минковского*

$$||u + v||_0 \le ||u||_0 + ||v||_0.$$

Неравенство Минковского в общем случае

$$||u + v||_{L_p} \le ||u||_{L_p} + ||v||_{L_p}$$

для $u, v \in L_p(\Omega), \quad 1 \le p < \infty$.

Свойство 4 (**Обобщенная производная в $L_2(\Omega)$**). *Функция $u \in L_2(\Omega)$ имеет обобщенную (слабую) производную $\partial^\alpha u$ порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в Ω, если $\partial^\alpha u \in L_2(\Omega)$ и выполняется равенство*

$$(\partial^\alpha u, \phi)_0 = (-1)^{|\alpha|}(u, \partial^\alpha \phi)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3}$$

Переменная $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ обозначает мультииндекс, где α_i неотрицательные целые числа. Порядок индекса $|\alpha| = \sum \alpha_i$, оператор дифференцирования $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. $C^\infty(\Omega)$ — пространство непрерывных бесконечно-дифференцируемых функций в области Ω. Пространство $C_0^\infty(\Omega)$ является подпространством $C^\infty(\Omega)$, функции которого принимают значения, отличные от нуля, только на компактной подобласти Ω (финитные функции).

Обобщенная производная является распространением понятия производной на некоторые классы недифференцируемых функций. Если функция дифференцируема в классическом смысле, тогда существует ее обобщенная производная и обе производные совпадают.

Определение производной в $L_2(\Omega)$ переносится и на дифференциальные операторы. Например, для функции $u \in L_2(\Omega)^n$ существует оператор дивергенции $\nabla \cdot u$, если $\nabla \cdot u \in L_2(\Omega)$ и справедливо

$$(\nabla \cdot u, \phi)_0 = -(u, \nabla \cdot \phi)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пример 3.1. Покажем, что функция $u(x) \in L_2(0,1)$

$$u(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0, 0.5] \\ 2 - 2x, & x \in (0.5, 1) \end{cases}$$

дифференцируема в обобщенном смысле и построим ее обобщенную производную. Для этого необходимо показать выполнение равенства (3) при $\alpha = (1)$. Возьмем произвольную функцию $\phi \in C_0^\infty(0,1)$. С помощью формулы интегрирования по частям можно показать, что

$$\begin{aligned}
(-1)^1(u, \partial^1 \phi)_0 &= -\left(\int_0^{0.5} 2x\phi'(x)dx + \int_{0.5}^1 (2-2x)\phi'(x)dx\right) \\
&= -\left(-\int_0^{0.5} 2\phi(x)dx + u(0.5)\phi(0.5) - \int_{0.5}^1 -2\phi(x)dx - u(0.5)\phi(0.5)\right) \\
&= \int_0^{0.5} 2\phi(x)dx + \int_{0.5}^1 -2\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Имеем, что равенство (3) выполняется для любой $\phi \in C_0^\infty(0,1)$ и обобщенная производная равна

$$\partial^1 u(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0, 0.5] \\ -2, & x \in (0.5, 1). \end{cases}$$

Отметим, что в точке $x = 0.5$ обобщенная производная может быть определена произвольно.

Пример 3.2. Покажем, что функция $u(x) \in L_2(0,1)$

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 0.5] \\ 1, & x \in (0.5, 1). \end{cases}$$

не дифференцируема в обобщенном смысле. Проверим выполнение равенства (3) при $\alpha = (1)$. Возьмем произвольную функцию $\phi \in C_0^\infty(0,1)$. С помощью формулы интегрирования по частям имеем, что

$$\begin{aligned}
(-1)^1(u, \partial^1 \phi(x))_0 &= -\left(\int_0^{0.5} 0\phi'(x)dx + \int_{0.5}^1 1\phi'(x)dx\right) \\
&= -(0 + \phi(1) - \phi(0.5)) = \phi(0.5) = \int_0^1 \delta(x - 0.5)\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

δ-функция $\notin L_2(\Omega)$, следовательно заданная функция $u(x)$ не имеет обобщенной производной. Таким образом получаем, что в рамках диффререцирования в обобщенном смысле, кусочно-дифференцируемую функцию не всегда можно кусочно-дифференцировать.

3.2 Пространство Соболева

Определение 3.1. Пространство Соболева $H^m(\Omega)$ для $m \in \mathbb{Z}_+$ — это множество функций $u \in L_2(\Omega)$, для которых существуют обобщенные производные $\partial^\alpha u$ при $|\alpha| \le m$,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) \,:\, \partial^\alpha u \in L_2(\Omega),\, |\alpha| \le m\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Отметим, что при $m = 0$ $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. Пространства Соболева являются вложенными друг в друга $L_2(\Omega) = H^0(\Omega) \supset H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega) \supset \cdots$.

Пространство Соболева определено и впервые применено в теории краевых задач математической физики. Отметим некоторые свойства пространств Соболева.

Свойство 5 (Скалярное произведение в $H^m(\Omega)$). *Можно задать функцию скалярного произведения, определенную на $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$,*

$$(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \le m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0,$$

определить соответствующую норму

$$||u||_m := \sqrt{(u, u)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \le m} ||\partial^\alpha u||_0^2}$$

и полунорму

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha| = m} ||\partial^\alpha u||_0^2}.$$

Пространство $H^m(\Omega)$ является гильбертовым пространством (полное векторное пространство со скалярным произведением).

В теории краевых задач особый интерес представляют пространства $H^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega)$. Для этих пространств имеем

$$(u, v)_1 = \sum_{|\alpha| \le 1} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 = (u, v)_0 + \sum_{|\alpha| = 1} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

$$(u, v)_2 = \sum_{|\alpha| \le 2} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 = (u, v)_1 + \sum_{|\alpha| = 2} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0.$$

Пример 3.3. Вычислить норму для функции $u(x) = \sin x$ в пространствах $H^m(0, 2\pi)$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

$$\begin{aligned} ||u||_0 &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right) dx} = \sqrt{\pi}. \\ ||u||_1 &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(x) + \cos^2(x) dx} = \sqrt{2\pi}. \\ ||u||_m &= \sqrt{(m+1)\pi}. \end{aligned}$$

Последнее равенство получено методом индукции.

Свойство 6 (**Альтернативное определение пространства Соболева**). *$H^m(\Omega)$ определено как замыкание $C^\infty(\Omega)$ по норме $||\cdot||_m$. $H_0^m(\Omega)$ — это замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $||\cdot||_m$.*

В частности, пространство $H_0^m(\Omega)$ состоит из функций $H^m(\Omega)$, чьи производные до порядка $|\alpha| \le m-1$ равны нулю на границе области. Пространство $H_0^m(\Omega)$ играет важную роль при решении краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка с условиями Дирихле на границе области.

Свойство 7 (**Эквивалентность нормы и полунормы в $H_0^m(\Omega)$**). *Норма $||\cdot||_m$ и полунорма $|\cdot|_m$ эквивалентны в $H_0^m(\Omega)$, то есть выражаются одна через другую с точностью до умножения на константу.*

Этот результат формулируется в виде теоремы

Теорема 3.1. *$\forall v \in H_0^m(\Omega)$ справедливо, что*

$$|v|_m \le ||v||_m \le (1+s)^m |v|_m,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область, которая содержится в n-мерном кубе с длиной ребра s.

Теорема представляет собой результат обобщения **неравенства Фридрихса** (неравенство Пуанкаре-Фридрихса) для ограниченной области Ω

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad ||v||_0 \le c(\Omega)|v|_1.$$

Свойство 8 (**Неравенство Буняковского в $H^m(\Omega)$**). *Неравенство Буняковского (неравенство Коши-Шварца) справедливо также для скалярного произведения в пространстве $H^m(\Omega)$. Действительно,*

$$\begin{aligned} |(u,v)_m| &= \left| \sum_{|\alpha|\le m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 \right| \le \sum_{|\alpha|\le m} |(\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0| \overset{\text{н-во Буняковского}}{\le} \\ &\le \sum_{|\alpha|\le m} ||\partial^\alpha u||_0 ||\partial^\alpha v||_0 \overset{\text{н-во Коши}}{\le} \sqrt{\sum_{|\alpha|\le m} ||\partial^\alpha u||_0^2} \sqrt{\sum_{|\alpha|\le m} ||\partial^\alpha v||_0^2} = ||u||_m ||v||_m. \end{aligned}$$

Свойство 9 (**Примеры неограниченных функций в $H^1(\Omega)$**). *В одномерном случае имеем, что $H^1(\Omega) \subset C(\Omega)$, следовательно неограниченных функций в $H^1(\Omega)$ не существует. В двумерном случае функция $u(r) = \ln\ln\frac{2}{r}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, принадлежит $H^1(\Omega)$ и является неограниченной функцией. В случае $n \ge 3$ функция $u(r) = r^{-\alpha}$ при $\alpha \le (n-2)/2$ принадлежит $H^1(\Omega)$ и является неограниченной функцией. Отметим, что с увеличением размерности пространства сингулярность функций, попадающих в $H^1(\Omega)$, усиливается.*

Задания

Задание 3.1 (теория). Показать, что функция $u(x)$ дифференцируема в обобщенном смысле и построить ее обобщенную производную.

Варианты:

1. $u(x) = |x|, \quad x \in [-1,1]$;
2. $u(x) = |x|\exp(ax), \quad x \in [-1,1]$;
3. $u(x) = x|\arctan x - 1|, \quad x \in [-1,1]$;

4. $u(x) = \sin(|x|), \quad x \in [-1, 1]$;

5. $u(x) = \sin(x)/|x|, \quad x \in [-1, 1]$;

6. $u(x) = |x + 2|, \quad x \in [-3, 1]$;

7.
$$u(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in [0, 1] \\ 3x^2 - 2x + 1, & x \in (1, 3] \end{cases}$$

8.
$$u(x) = \begin{cases} 2x/\pi, & x \in [0, \pi/2] \\ \sin x, & x \in (\pi/2, \pi] \end{cases}$$

9.
$$u(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \exp(3x) - 1, & x > 0 \end{cases}$$

Задание 3.2 (теория)**.** Вычислите следующие нормы $||\partial^2 u||_0, ||\partial^1 u||_1, ||u||_2$ для функции из Задания 3.1. Для Вариантов 1 и 6 необходимо показать, что вторая производная не существует в обобщенном смысле.

Задание 3.3 (теория)**.** Показать, что функция $u(x) = 1 \notin H_0^1(\Omega)$, где Ω ограниченное множество. Воспользуйтесь неравенством Пуанкаре-Фридрихса.

Задание 3.4 (теория+практика)**.** Полагаем, что область D_1 заполнена магнитной жидкостью и имеет форму шара с радиусом R и центром в начале координат, см. Рис. 1. Область вне шара заполнена воздухом и аппроксимируется кубической областью $D_2 = (-5R, 5R)^3$.

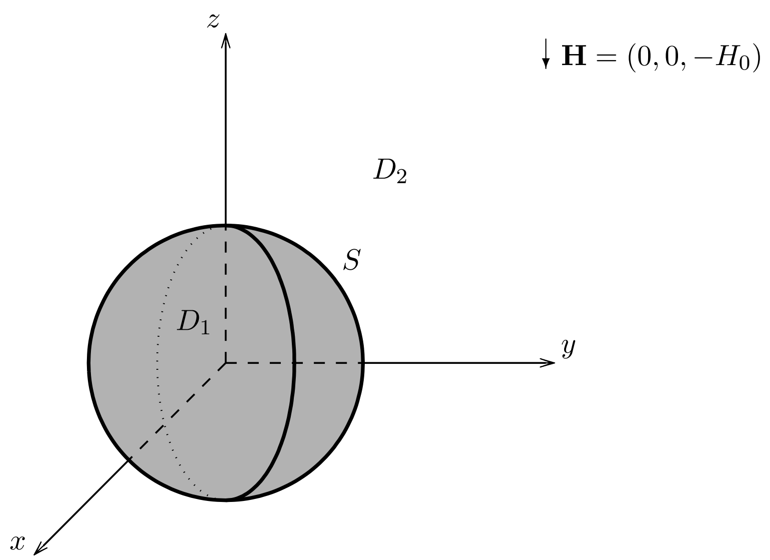

Рис. 1: Постановка задачи.

Уравнения Максвелла для расчета магнитного поля $\mathbf{H}$ в непроводящих средах может быть записано в стационарном случае в виде задачи для магнитного потенциала $u(x, y, z)$ как внутри магнитной жидкости, так и вне ее, где полагается следующая зависимость между магнитным полем и потенциалом $\mathbf{H} = -\nabla u$,

$$-\nabla \cdot (\mu_i \nabla u_i) = 0 \quad (x, y, z) \in D_i, \quad i = 1, 2,$$

где $u_i = u_i(x,y,z)$, $\mu_i = const > 0$ обозначает магнитную проницаемость вещества в области D_i. Значение $\mu_1 = \mu_0(1+\chi) = const$ соответствует предположению о линейной зависимости намагниченности магнитной жидкости от напряженности магнитного поля $M(H) = \chi H$, где μ_0 — магнитная проницаемость воздуха; $\mu_2 = \mu_0$. На поверхности S раздела двух сред выполняется условие переноса

$$[u] = 0, \quad \left[\mu\frac{\partial u}{\partial n}\right] = 0 \quad (x,y,z) \in S,$$

где $[\cdot]$ обозначает скачок функции при переходе через поверхность раздела, т.е. $[u] = u_2 - u_1$, $\left[\mu\frac{\partial u}{\partial n}\right] = \mu_1\frac{\partial u_1}{\partial n} - \mu_2\frac{\partial u_2}{\partial n}$. В удалении от области магнитной жидкости магнитное поле полагается вертикально-направленным вдоль оси Oz с постоянной интенсивностью H_0, см. Рис. 1. Как следствие, можно сформулировать условие Дирихле на внешней границе области D_2

$$u_2|_{S_{ext}} = H_0 z, \quad (x,y,z) \in S_{ext},$$

где $\partial D_2 = S \cup S_{ext}$. Необходимо найти распределение магнитостатического потенциала $u(x,y,z)$ внутри магнитной жидкости и вне ее. Для расчетов полагаем $R = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 10$, $H_0 = 1$, что соответствует обезразмериванию пространственных переменных по R, магнитного поля по H_0.

1. Построить вариационную задачу и задачу минимизации, соответствующую исходной краевой задаче.

2. Решить краевую задачу, используя возможности PDEToolbox в Matlab. Так как задача является трехмерной, реализация в Matlab возможна только через скриптовый файл. Вместо реализации в Matlab, можно осуществить реализацию с использованием библиотеки FEniCS на Python или Netgen/NGSolve на Python или фреймворка PyDEns на Python.

3. Сравнить визуально построенное конечно-элементное решение и точное решение u_{exact}, которое соответствует неограниченной области D_2

$$u_{exact}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{3\mu_2}{\mu_1+2\mu_2} H_0 z, & (x,y,z) \in D_1 \\ H_0 z + R^3 \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+2\mu_2} \frac{H_0 z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, & (x,y,z) \in D_2. \end{cases}$$

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.