1 Введение

На сегодняшний день метод конечных элементов (МКЭ) является одним из эффективных и, как следствие, наиболее часто используемых численных методов для решения научных и прикладных инженерных задач, математические модели которых описываются с помощью уравнений с частными производными. В частности, МКЭ применяется для решения задач математической физики (механика твердых тел, теплопроводность, электромагнетизм, аэро- и гидродинамика). О популярности метода говорит тот факт, что результатом запроса «finite element method» в поисковой системе Google является ~ 12.5 млн страниц, для сравнения с конечно-разностным методом «finite difference method», поиском которого является результат ~ 2.2 млн страниц (август 2020 г.).

Метод конечных элементов был разработан инженерами в конце 50-х годов для решения задач механики твердого тела. Первые математические работы по МКЭ — Курант (1943), Фридрикс (1962), Оганесян (1966). МКЭ получил популярность в конце 70-х годов в инженерных кругах и среди математиков. Первый учебник по МКЭ написан в 1973 году авторами Стренг и Фикс, известная книга среди инжененров — Зинкевич (1971).

Эффективность метода конечных элементов опрделеляется следующими характеристиками метода:

- МКЭ позволяет осуществлять эффективное компьютерное моделирование нелинейных процессов;
- МКЭ применяется в областях любой геометрической сложности;
- МКЭ обладает развитым математическим аппаратом для построения и анализа метода;
- МКЭ является гибким в в алгоритмизации; интегрирован во многие системы компьютерной математики и САПР;
- МКЭ численно эффективен для решения задач с большим числом неизвестных $\approx 10^9$.

Процесс решения некоторой задачи математической физики с использованием метода конечных элементов обычно проходит пять основных этапов:

1. Препроцессинг: построение вариационной (интегральной, слабой) формулировки задачи математической физики с целью ослабления требований гладкости для функции решения; определение функционального пространства для неизвестной функции решения; исследование вопроса существования и единственности решения задачи в интегральной формулировке.

2. Разбиение области задачи на простые подобласти (элементы), такие как, например, треугольники, четырехугольники в двумерном случае или тетраэдры, гексаэдры в трехмерном случае (на сегодняшний день этот этап выполняется автоматически генераторами сеток); определение базисных функций на основе разбиения для представления неизвестной функции решения задачи.

3. Аппроксимация неизвестной функции решения с помощью базисных функций из Этапа 2; переход от вариационных уравнений к конечномерной системе алгебраических уравнений.

4. Решение полученной системы алгебраических уравнений. В результате имеем аппроксимацию решения исходной задачи.

5. Постпроцессинг: Исследование точности полученного решения, визуалиация решения и др.

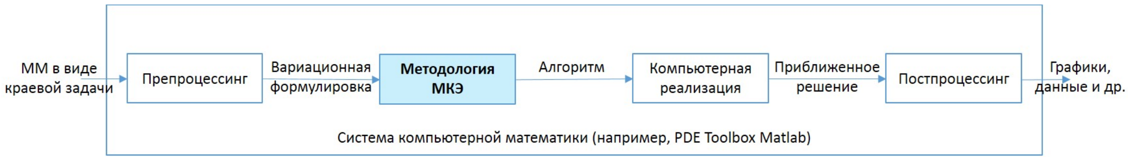

Рис. 1: Внешнее описание метода конечных элементов с интеграцией в систему компьютерной математики.

Математическое исследование метода конечных элементов базируется на вариационной (интегральной) формулировке задачи математической физики (Тема 2). Решение вариационной задачи ищется в функциональном пространстве специального вида (пространства Соболева) (Тема 3). Исследование вопроса существования и единственности решения вариационной задачи представлено в Теме 4. Разбиение области задачи на элементы позволяет сформулировать исходную задачу в конечномерном пространстве, специальный выбор которого и определяет метод конечных элементов (Тема 5). Построению системы алгебраических уравнений посвящена Тема 6. Вопросы сходимости метода конечных элементов обсуждаются в Темах 7 и 8.

Математическим аппаратом для исследования МКЭ является нелинейный анализ (нелинейные функционалы и нелинейные операторы в бесконечномерных пространствах, вариационное исчисление).

1.1 Классификация уравнений с частными производными второго порядка

Уравнения с частными производными разделяются на несколько типов. В случае линейных дифференциальных уравнений второго порядка это эллиптические, гиперболические и параболические уравнения. Теория и численное моделирование для трех типов уравнений очень различаются. Для численного решения эллиптических задач применяются конечно-разностные методы и вариационные методы. К последним относится метод конечных элементов. Основным применением метода конечных элементов является численное решение уравнений эллиптического типа.

Линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с n переменными имеет следующий вид

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x). \tag{1}$$

В случае, когда $a_{ij} = const$, $b_i = const$ и $c = const$, имеем дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для дважды непрерывно-дифференцируемой функции $u(x)$ справедливо, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, следовательно имеем свойство симметрии $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ и соответствующая $n \times n$-матрица

$$A(x) := (a_{ij}(x))$$

является симметрической.

Определение 1.1. Уравнение (1) называется эллиптическим в точке x, если $A(x)$ положительно определенная матрица. Уравнение (1) называется гиперболическим в точке x, если $A(x)$ имеет одно отрицательное собственное значение и $n-1$ положительных. Уравнение (1) называется параболическим в точке x, если $A(x)$ положительно полуопределенная матрица и ранг $(A(x), b(x))$ равен n. Уравнение называется эллиптическим, гиперболическим или параболическим, когда для всех точек области выполняются соответствующие условия.

Замечание 1.1 (Критерий Сильвестра). Для того, чтобы действительная симметрическая матрица была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры были положительными.

Замечание 1.2. Действительная симметрическая матрица является положительно определенной в том и только в том случае, если все собственные значения матрицы положительны.

В эллиптическом случае количество переменных уравнения (1) n совпадает с размерностью области решения задачи d, т.е. $n = d$, и уравнение (1) записывается в виде

$$Lu = f, \quad L := -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \tag{2}$$

где L обозначает эллиптический дифференциальной оператор второго порядка. Слагаемое $-\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ является главной частью оператора L. У гиперболических и параболических задач одна переменная отличается. Как правило, это временная переменная t и количество переменных уравнения $n = d + 1$. Гиперболическое уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f,$$

а параболическое уравнение формулируется как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f.$$

Дифференциальное уравнение эллиптического типа вида (2) в области Ω вместе с граничными условиями на $\partial\Omega$ называется **краевой задачей**. В общем случае краевой задачей является дифференциальное уравнение вместе с соответствующими краевыми условиями (начальными условиями и граничными условиями).

Выполните Задание 1.1 для определения области эллиптичности заданного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка.

1.2 Основные уравнения математической физики

Уравнения математической физики – это уравнения, описывающие математические модели физических явлений. К классическим уравнениям математической физики относятся уравнение Пуассона, уравнение колебаний и уравнение теплопроводности.

Многие явления физики и механики (гидро- и газодинамики, упругости, электродинамики, оптики, теории переноса, физики плазмы, квантовой физики, терии гравитации и т.д.) описываются краевыми задачами для дифференциальных уравнений.

1.2.1 Уравнение Пуассона

Уравнение Пуассона является примером эллиптического дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Необходимо найти функцию $u(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = f(x) \quad x \in \Omega \tag{3}$$

для заданной функции $f(x)$. Дифференциальный оператор в уравнении (3) называется оператором Лапласа

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad L = -\Delta.$$

Отметим, что $\Delta = \nabla \cdot \nabla$. В случае, когда $f(x) = 0$, уравнение Пуассона называется уравнением Лапласа или потенциальным уравнением.

Выполните Задание 1.2 и Задание 1.3 для применения дифференциальных операторов градиента и Лапласа к заданным функциям.

Для дифференциального уравнения (3) необходимо задание граничных условий. В общем случае граничное условие имеет вид

$$k(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n} + h(x)u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$, $k(x)$, $h(x)$ и $g(x)$ заданные функции на границе области. В частности, можно сформулировать следующие условия: **условие Дирихле** (граничное условие первого рода)

$$u(x) = g_D(x), \quad x \in \partial\Omega;$$

условие Неймана (граничное условие второго рода)

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = g_N(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Если граничные условия различаются на частях границы области, то краевая задача называется смешанной. Например,

$$u = g_D(x) \quad x \in \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_N(x) \quad x \in \Gamma_N,$$

где $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N \neq \emptyset$.

Для полноты формулировки кроме уравнения и граничных условий необходимо указывать регулярность функций $f(x), k(x), h(x), g(x)$ и регулярность границы области задачи $\partial\Omega$. Например, если функция $f(x) \in C^0(\Omega)$, тогда решение $u(x) \in C^2(\Omega)$. Для границы области $\partial\Omega$ можно, например, определить C^2-регулярность, т.е. кривизна является непрерывной функцией криволинейных координат, описывающих границу.

Возможные физические интерпретации уравнения (3):

- $u(x)$ — потенциал электростатического поля, $f(x)$ — объемная плотность зарядов;
- $u(x)$ — отклонение тонкой мембраны, $f(x)$ — стационарная нагрузка;
- $u(x)$ — стационарное распределение температуры, $f(x)$ — плотность теплового источника тепла внутри тела;
- $u(x)$ — потенциал скорости в случае стационарного течения несжимаемой жидкости.

1.2.2 Уравнение колебаний

Примером гиперболического дифференциального уравнения является уравнение колебаний

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (p\nabla u) - qu = f(x,t).$$

Коэффициенты ρ, p, q опрделеяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; $f(x,t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения. К физическим процессам, описание которых осуществлятся с помощью волнового уравнения, относятся колебание струны, мембраны, стержня, трехмерных объемов и распространение звуковых и электромагнитных волн.

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса колебаний необходимо дополнительно задать величины смещения и скорости в начальный момент времени (начальные условия) и режим на концах (граничные условия). Имеем начальные условия

$$u|_{t=t_0} = u_0(x), \quad x \in \partial\Omega$$

$$u_t|_{t=t_0} = u_1(x), \quad x \in \partial\Omega$$

и граничное условие вида

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + hu = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > t_0$$

для заданных функций $k(x,t)$, $h(x,t)$ и $g(x,t)$ на границе области.

1.2.3 Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности является примером параболического дифференциального уравнения. Пусть $u(x,t) : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_{end}] \to \mathbb{R}$ распределение температуры в теле. Изменение энергии в элементе объема определяется тепловым потоком через поверхность тела, а также интенсивностью тепла внутри тела $f(x,t)$. На основании этого можно построить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(x,t),$$

где $a = k/(c\rho)$ для постоянных значений коэффициента теплопроводности k, удельной теплоемкости среды c и плотности ρ. Для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальное распределение температуры в среде (начальное условие)

$$u|_{t=t_0} = u_0(x) \quad x \in \Omega$$

и режим на границе среды (граничное условие) вида

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + hu = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > t_0$$

для заданных функций $k(x,t)$, $h(x,t)$ и $g(x,t)$ на границе области.

1.3 Задания

Задание 1.1 (теория)**.** Найти область эллиптичности уравнения, т.е. при каких значения $a, x, y \in \mathbb{R}$ уравнение является эллиптическим?

1. $(1+x^2)u_{xx} - 3xyu_{xy} + \frac{1+y^2}{2}u_{yy} = 0,$
2. $u_{xx} + \frac{\cos(x+y)}{4}u_{xy} + \frac{1}{2}u_{yy} = 0,$
3. $-4u_{xx} + 2au_{xy} - u_{yy} = 0,$
4. $-u_{xx} + 2xu_{xy} - 5u_{yy} = axu_x,$
5. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0,$
6. $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0,$
7. $u_{xx} - yu_{yy} = 0,$

8. $x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} = 0$,
9. $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} = 0$,
10. $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$,
11. $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$,
12. $u_{xx} - 2\sin(x) u_{xy} + (2 - \cos(x)^2) u_{yy} = 0$.

Задание 1.2 (теория)**.** Для функции $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вычислить $\nabla u, \Delta u$. Вычислите скорость изменения функции $u(x, y)$ в точке $(1, 1)$ в направлении $\mathbf{i} = (2, 0)^T$ и $\mathbf{j} = (0, 3)^T$.

1. $u(x, y) = \sin(x)/(y - 2)$,
2. $u(x, y) = x^2 + y^4$,
3. $u(x, y) = \exp(x) y$,
4. $u(x, y) = x^{10} + \cos y$,
5. $u(x, y) = \exp(y)/(x^2 + 1)$,
6. $u(x, y) = \sinh(x)/(x + 1)$,
7. $u(x, y) = \cos(xy)$
8. $u(x, y) = x^{y+1}$,
9. $u(x, y) = \ln(x + y + 1)$,
10. $u(x, y) = 2x + 3y$.

Задание 1.3 (теория)**.** Для функции $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, u = |x|^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ вычислить $\nabla u, \Delta u$.

Задание 1.4 (практика)**.** PDE (Partial Differential Equation) Toolbox системы Matlab позволяет решать задачи математической физики методом конечных элементов. Задачи описываются уравнениями в частных производных второго порядка в двумерной и трехмерной (с версии Matlab R2015a) расчетной области. Работа с PDE Toolbox возможна средствами GUI, вызов осуществляется командой pdetool. GUI PDE Toolbox предоставляет средства для описания уравнений (*меню PDE*), задания граничных и начальных условий (*меню Boundary*), задания области при помощи примитивов (*меню Draw*) и операций над множествами (*Set Formula*), генерации и визуализации сеток в области задачи (*меню Mesh*), визуализации результата (*меню Plot*).

Используя справочную систему PDE Toolbox (Matlab R2020a) изучить примеры решения следующих задач: уравнение Пуассона в круге (*Help/PDE Toolbox/Getting Started/Solve 2-D PDEs Using the PDE Modeler App*); уравнение Пуассона в области сложной формы (*Help/PDE Toolbox/Getting Started/Poisson's Equation with Complex 2-D Geometry: PDE Modeler App*).

Задание 1.5 (практика)**.**

1. Для заданного точного решения $u(x, y)$ из Задания 1.2 построить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) & = & f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) & = & g_D(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

   Решить построенную задачу средствами GUI PDEToolbox и сравнить визуально точное решение $u(x, y)$ с численным решением, полученным методом конечных элементов.

2. Для заданного точного решения $u(x, y)$ из Задания 1.2 построить смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона в единичном квадрате $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & (x, y) \in \Omega \\ u &= g_D, & (x, y) \in \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_N, & (x, y) \in \Gamma_N, \end{cases}$$

где $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N \neq \emptyset$. Решить построенную задачу средствами GUI PDEToolbox и сравнить визуально точное решение $u(x, y)$ с численным решением, полученным методом конечных элементов.

3. Для заданного точного решения $u(x, y)$ из Задания 1.2 построить задачу Неймана для уравнения Пуассона в единичном квадрате $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_N, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Решить построенную задачу средствами GUI PDEToolbox и сравнить визуально точное решение $u(x, y)$ с численным решением, полученным методом конечных элементов. Обратите внимание на качество полученного решения.

Задание 1.6 (практика)**.** Решите указанную краевую задачу аналитически (например, с помощью интеграла Пуассона для функции решения в полярных координатах) и численно. Осуществите визуальное сравнение полученных решений

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) &= 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) &= 1, & x^2 + y^2 = 1, y \geq 0 \\ u(x, y) &= -1, & x^2 + y^2 = 1, y < 0. \end{cases}$$

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994, 2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.