Лабораторная работа №3

Нелинейные математические модели колебательных явлений

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
февраль 2020
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. Модель физического маятника под действием силы тяжести без учета сопротивления среды

Концептуальная постановка задачи

- Объектом исследования является физическое тело массы m, которое подвешено на невесомом и нерастяжимом стержне длины l к неподвижной опоре. Тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной стержня, поэтому принимаем его за материальную точку.
- Тело находится под действием силы тяжести $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{g}$; силой сопротивления среды пренебрегаем. Допущение об отсутствии трения справедливо для небольших промежутков времени.
- Тело качается в фиксированной плоскости. Обозначим через $\alpha(t)$ угол отклонения стержня от вертикального положения равновесия. $\alpha > 0$ при отклонении против часовой стрелки.

Принимая во внимание, что в некоторый момент времени стержень отклонили на угол α_0 и сообщили телу скорость v_0, требуется определить угол отклонения стержня $\alpha(t)$ как функцию времени.

Математическая модель

Математическая модель представляет собой задачу Коши для нелинейного однородного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} = -\frac{g\sin(\alpha)}{l},\quad \alpha(0) = \alpha_0,\quad \frac{d\alpha(0)}{dt} = \omega_0. \tag{1}$$

В случае малых колебаний маятника математическая модель (1) упрощается за счет допущения, что $\sin(\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$ и сводится к модели гармонического осциллятора

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} = -\frac{g\,\alpha}{l},\quad \alpha(0) = \alpha_0,\quad \frac{d\alpha(0)}{dt} = \omega_0. \tag{2}$$

Задачи

1. Изобразите фазовые траектории динамической системы на фазовой плоскости $\left(\alpha,\ \omega := \frac{d\alpha(t)}{dt}\right)$ и сформулируйте условия, при которых маятник находится в положении равновесия (особые

точки на фазовой плоскости), маятник совершает колебательные движения (замкнутые фазовые траектории), маятник совершает вращательные движения (волнистые фазовые траектории). Сформулируйте также условие для фазовой траектории, которая разделяет колебательное и вращательное движение маятника (сепаратриса).

2. Осуществите динамическую визуализацию поведения маятника для интерактивного задания параметров модели с учетом трех режимов движения: стационарный режим, колебательные движения, вращательные движения.

3. В предположении о малых колебаниях маятника и без учета сопротивления среды определите длину стержня l для создания секундного маятника, период колебания которого равен 2 секунды.

4. Покажите, что период колебания маятника T в общем случае зависит от начального отклонения тела α_0 по формуле $T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\alpha_0}\frac{1}{\sqrt{\cos(\alpha)-\cos(\alpha_0)}}\,d\alpha$. Этот факт является основной причиной того, что маятниковые часы не точные, ибо практически тело всякий раз отклоняется в крайнее положение на угол, отличный от α_0 , см. [1, стр. 44-45].

Задание 2. Модель двухвидового взаимодействия “хищник-жертва”

Система уравнений Лотки-Вольтерра является математической моделью взаимодействия популяции жертв с численностью $N(t) \geq 0$ и популяции хищников с численностью $M(t) \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{dN}{dt} = \alpha N - c N M,\\
&\frac{dM}{dt} = -\beta M + d N M,\\
&N(t_0) = N_0,\\
&M(t_0) = M_0,
\end{aligned} \qquad (3)$$

где $\alpha > 0$ -- коэффициент рождаемости жертв в отсутствие хищников при условии неограниченности ресурса для питания; $c > 0$ -- характеризует уменьшение численности жертв при взаимодействии с хищниками; $\beta > 0$ -- коэффициент смертности хищников при отсутствии жертв; $d > 0$ -- характеризует увеличение численности хищников при взаимодействии с жертвами.

Задачи

1. Проиллюстрируйте существование колебательного поведения системы “хищник-жертва” в окрестности нетривиального положения равновесия $N^* = \frac{\beta}{d}$, $M^* = \frac{\alpha}{c}$ по решению математической модели (3) и по фазовому портрету соответствующей динамической системы. Решение необходимо построить численно, например, с помощью **NDSolve**. Убедитесь, что положение равновесия $N^* = \frac{\beta}{d}$, $M^* = \frac{\alpha}{c}$ является центром, так как его окрестность сплошь заполнена непересекающимися замкнутыми фазовыми траекториями, окружающими положение равновесия.

2. Продемонстрируйте структурную неустойчивость уравнений Лотки-Вольтерра. Для этого добавьте к правым частям дифференциальных уравнений динамической системы произвольные слагаемые вида $\epsilon f(N, M)$, где $\epsilon << 1$ и покажите по фазовому портрету, что нарушается качественное поведение системы в окрестности нетривиального положения равновесия (изменяется тип особой точки).
Для описания реальных процессов структурно-неустойчивые модели использовать нельзя!

Литература

[1] В. В. Амелькин. Дифференциальные уравнения в приложениях. -- М.: Наука, 1987.

[2] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. -- М.: Физматлит, 1959.