Лабораторная работа №2

Линейные математические модели колебательных явлений

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
февраль 2020
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Объект моделирования -- пружинный осциллятор

Концептуальная постановка задачи

- Объектом исследования является физическое тело массы m, которое находится на одном конце пружины, второй конец пружины жестко закреплен. Тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной пружины, поэтому принимаем его за **материальную точку**.
- Тело движется вперед или назад по горизонтальной поверхности. Обозначим через $r(t)$ координату тела вдоль оси пружины относительно положения равновесия $r = 0$, когда пружина не сжата и не растянута. Будем считать, что $r(t) > 0$, когда пружина растянута и $r(t) < 0$, когда она сжата.
- Тело находится под действием силы упругости пружины. Сила упругости описывается **законом Гука** $F = -k\,r$, где жесткость пружины $k = \mathrm{const} > 0$. Закон Гука является экспериментальным и справедлив при небольших отклонениях пружины от ее положения равновесия.
- Тело может двигаться без трения. Предположение об отсутствии трения справедливо для небольших промежутков времени. Если учитывать сопротивление среды, то можно сделать допущение, что возникает сила трения, пропорциональная скорости движения $F_{\text{тр}} = -\mu \frac{dr(t)}{dt}$, где динамическая вязкость $\mu > 0$. Приведенная зависимость называется **формулой Стокса** и является допустимой при малых скоростях движения.
- На тело может действовать **внешняя сила**, например $F(t) = F_0 \sin(t\,\omega_2)$, что приводит к модели вынужденных колебаний.
- Расстояние между положением равновесия $r = 0$ и стенкой, к которой крепится пружина, равно L.

Принимая во внимание, что в некоторый момент времени $t = 0$ пружину растянули на величину r_0 и сообщили телу скорость v_0, требуется определить координату тела $r(t)$ как функцию времени.

Задание 1. Амплитуда гармонических колебаний пружинного осциллятора

Математическая модель пружинного осциллятора без учета сопротивления среды представляет собой задачу Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами следующего вида

$$m\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + k\,r(t) = 0,\quad r(0) = r_0,\quad \frac{dr(0)}{dt} = v_0. \qquad (1)$$

Задачи

1. [1, стр. 34, упр. 4] Найдите условия на величины r_0 и v_0, при выполнении которых груз не может удариться о стенку. Это позволит определить область применимости модели пружинного осциллятора (1), так как при соударении со стеной груз испытывает с ее стороны некоторую силу, которая дополнительно должна быть учтена в модели.
2. Осуществите динамическую визуализацию поведения пружинного осциллятора для интерактивного задания параметров модели. В случае соударения со стеной остановите анимацию, используя метод **EventLocator** функции **NDSolve**, см. `http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveEventLocator.html`.

Задание 2. Модель пружинного осциллятора с учетом сопротивления среды

Полагаем, что на пружинный осциллятор воздействует сила трения, заданная формулой Стокса $F_{тр} = -\mu\,\frac{dr(t)}{dt}$, где динамическая вязкость $\mu > 0$.

Задачи

1. Изобразите фазовые траектории для модели пружинного осциллятора с учетом силы трения для трех возможных типов поведения системы: затухающие колебания, критическое колебание, апериодическое затухание.
2. Приведите собственные значения матриц для динамических систем, соответствующих трем типам поведения.
3. Какому типу поведения соответствует движение осциллятора ($m = 1$ кг, $k = 10$ Н/м) в воздухе ($\mu = 1.82 * 10^{-5}$ Нс/м^2), в воде ($\mu = 1.002 * 10^{-3}$ Нс/м^2), в глицерине ($\mu = 1.49$ Нс/м^2) при температуре 20°C?

Задание 3. Модель пружинного осциллятора под действием внешней силы

Тело, закрепленное на пружине, совершает незатухающие колебания. Предположим, что на тело действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(t\,\omega_2)$.

Задачи

1. Постройте частное решение $r^*(t)$ модели пружинного осциллятора при наличии резонанса $r^*(t) = t\,(C_1 \sin(\omega\,t) + C_2 \cos(\omega\,t))$ и без него $r^*(t) = C \sin(\omega_2\,t)$ методом неопределенных коэффициентов с использованием возможностей символьных вычислений.
2. Изобразите резонансное и нерезонансное решение математической модели для произвольно заданных значений параметров модели.

Задание 4. Система линейных химических реакций

Содержательная постановка задачи

Вещество X притекает извне с постоянной скоростью k_1, превращается в вещество Y со скоростью, пропорциональной концентрации вещества X, и коэффициентом пропорциональности k_2 и вещество Y выводится из сферы реакции со скоростью, пропорциональной концентрации вещества Y, и коэффициентом пропорциональности k_3.

Задачи

1. По содержательной постановке задачи сформулируйте концептуальную поставку задачи и постройте математическую модель для концентрации веществ X и Y.
2. Исследуйте положение равновесия соответствующей линейной динамической системы второго порядка на устойчивость (по фазовому портрету или методом Ляпунова).

Литература

[1] А. А. Самарский, А. П. Михайлов. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. -- М.: Физматлит, 2001.

[2] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. -- М.: Физматлит, 1959.

[3] Ч. Г. Эдвардс, Д. Э. Пенни.Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и Matlab. -- М.: ООО “И.Д. Вильямс”, 2008.

[4] S. Heinz. Mathematical Modeling. --Springer, 2011.

[5] Р. А. Прохорова. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие. -- Мн. : БГУ, 2017. http://elib.bsu.by/handle/123456789/205697

[6] В. В. Амелькин. Дифференциальные уравнения : учебное пособие. -- Мн. : БГУ, 2012. http://elib.bsu.-by/handle/123456789/43871

[7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том 1. Механика. -- М.: Наука, 1988.