

Лабораторная работа №7

Математические модели процессов диффузии

Мат. моделирование динамических процессов 1

БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр

специальность Компьютерная математика и системный анализ

май 2020

ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. Одномерное уравнение диффузии в неподвижной среде

Концептуальная постановка задачи

[2, стр. 219, задача 9] Цилиндр длины l , заполненный воздухом при давлении и температуре окружающей среды, открывают с одного конца в начальный момент времени, и из окружающей атмосферы, где концентрация некоторого газа равна $\phi_0 = \text{const}$, начинается диффузия газа в цилиндр. Начальная концентрация газа в цилиндре равна 0. Площадь поперечного сечения цилиндра намного меньше длина цилиндра.

Задачи

1. По концептуальной постановке задачи сформулируйте математическую модель в виде первой краевой задачи (начальные условия и граничные условия Дирихле) для одномерного уравнения диффузии в неподвижной среде.
2. Постройте аналитическое решение математической модели с помощью метода разделения переменных, а также с помощью функции **DSolve**. Сравните графики построенных решений.
3. Найдите количество газа, диффундировавшего в цилиндр за время t . Для этого вычислите интеграл от концентрации $\phi(t)$ по длине стержня. Постройте график зависимости количества диффундировавшего газа от времени t .
4. Убедитесь, что со временем система выйдет на стационарное состояние, когда концентрация во всем объеме будет постоянной, т.е. $\phi(x, t) \rightarrow \phi_0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Дополнение

Отметим, что аналогичная математическая модель строится для описания одномерного процесса передачи тепла на основании следующей концептуальной постановки задачи.

Концептуальная постановка задачи

На одном конце стержня длины l поддерживается постоянная температура $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$, второй конец стержня теплоизолирован. Начальная температура стержня равна 0. Площадь поперечного сечения стержня намного меньше длина стержня, теплообмен на боковой поверхности отсутствует. Найдите распределение температуры $u(x, t)$ стержня при $0 < t < +\infty$.

Задание 2. Математические модели пространственной популяционной динамики для случая случайного перемещения

Рассмотрим математическую модель популяционной динамики в предположении о случайном перемещении особей в области проживания $X = [0, l]$. Математическую модель можно описать с помощью уравнения реакции-диффузии

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + k u (1 - u), \quad (1)$$

где $u(x, t)$ -- плотность популяции, $0 \leq x \leq l$, $D = \text{const} > 0$ -- характеризует скорость передвижения особей, $k = \text{const} > 0$. Последнее слагаемое в правой части уравнения регулирует рост численности популяции и соответствует логистической модели.

Уравнение (1) называется уравнением Фишера - Колмогорова (1937) и является фундаментальным уравнением в биологии.

Дополнительно к уравнению (1) формулируется начальное условие $u(x, 0) = u_0(x)$ и однородное условие Дирихле на границе области, имитирующее проживание популяции на острове, $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Задачи

1. Исследуйте устойчивость положений равновесия рассматриваемой модели с помощью фазового портрета стационарных решений.
2. Изобразите графики решений математической модели (1), построенных с помощью NDSolve, при $k = 1$ с некоторым начальным условием $u_0(x)$, близким к нулю, при различных размерах области X и различных значениях скорости передвижения особей D . Покажите, что при недостаточном размере области $l < l^* = \pi \sqrt{\frac{D}{k}}$ популяция будет вымирать.

3. Для модели Скеллама вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + k u, \quad (2)$$

с однородными условиями Дирихле на границе области также справедливо утверждение, что при недостаточном размере области $l < l^* = \pi \sqrt{\frac{D}{k}}$ популяция будет вымирать. Проверьте это утверждение по аналогии с Задачей 2.

4. Для двумерной модели Скеллама вида

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + k u, \quad (3)$$

в квадратной области $X = [0, l] \times [0, l]$ с однородными условиями Дирихле на границе области необходимо проверить существование критического размера области l^* , такого, что при $l < l^*$ популяция будет вымирать. Проверку необходимо осуществить на основе интерактивной визуализации решения модели (3) при $k = 1$.

Задание 3 (необязательное). Математическая модель преобразования сигнала в аксоне

[5, стр. 117, упр. 4.5.5] Рассмотрим математическую модель преобразования сигнала в аксоне в виде уравнения реакции-диффузии

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \left(u - \frac{1}{2} \right) (1 - u) u$$

для потенциала мембраны $u(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, где l -- заданная длина аксона, с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$ и с однородными условиями Неймана на границах аксона

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0.$$

Задачи

1. Исследуйте устойчивость положений равновесия рассматриваемой модели с помощью фазового портрета стационарных решений.
2. Попробуйте сформулировать биологический смысл построенных стационарных решений.

Задание 4. Одномерное стационарное уравнение диффузии с точечным источником

1. Сформулируйте математическую модель для описания процесса выброса химического вещества (аэрозоля) промышленным предприятием на основании стационарного одномерного процесса диффузии вещества при условиях, что
 - коэффициент диффузии постоянный, $D(x) = \text{const} > 0$;
 - скорость потока воздушных масс атмосферы постоянная, $u(x) = \text{const}$;
 - процесс поглощения атмосферой химического вещества задается коэффициентом $\sigma = \text{const} > 0$;
 - точечный источник вещества мощности $Q = \text{const} > 0$, выбрасывающий в атмосферу аэрозоль, расположен в точке $x = x_0$.
2. Постройте аналитическое решение математической модели.
3. Осуществите динамическую визуализацию решения модели с интерактивным изменением параметров модели D , u , σ , Q , x_0 .

Литература

- [1] В. И. Корзюк. Уравнения математической физики: учеб. пособие. -- Минск.: БГУ, 2011.
- [2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. -- М.: Наука, 1977.
- [3] Г. И. Марчук. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. -- М.: Наука, 1982.
- [4] Л. А. Петросян, В. В. Захаров. Введение в математическую экологию. -- Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.
- [5] G. Vries, T. Hillen, M. Lewis, J. Mueller, B. Schoenfish. A course in mathematical biology: quantitative modeling with mathematical and computational methods. SIAM, 2006.