Лабораторная работа №6

Математические модели процессов переноса

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
апрель 2020
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Решение уравнения переноса

Уравнение переноса является частным случаем уравнения непрерывности, когда скорость потока частиц постоянная. Построим аналитическое решение уравнения переноса в общем виде

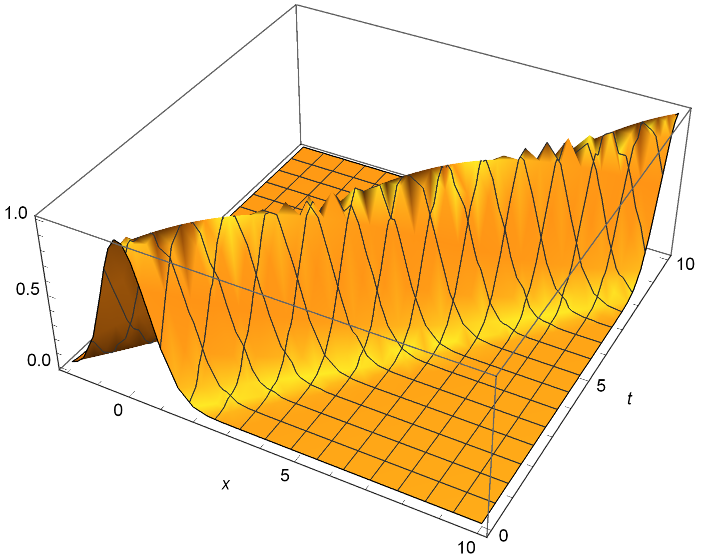
```
In[1]:= ClearAll[r, r0]

In[2]:= DSolve[{D[r[x, t], t] + u0 D[r[x, t], x] == 0, r[x, 0] == r0[x]}, r[x, t], {x, t}]

Out[2]= {{r[x, t] → r0[x - t u0]}}
```

Определим конкретные вид для скорости потока и начального условия

```
In[3]:= u0 = 1; r0[x_] := e^(-x^2);

In[4]:= DSolve[{D[r[x, t], t] + u0 D[r[x, t], x] == 0, r[x, 0] == r0[x]}, r, {x, t}] // First

Out[4]= {r → Function[{x, t}, e^(-(-t+x)^2)]}

In[5]:= r = r /. (% // First);
```

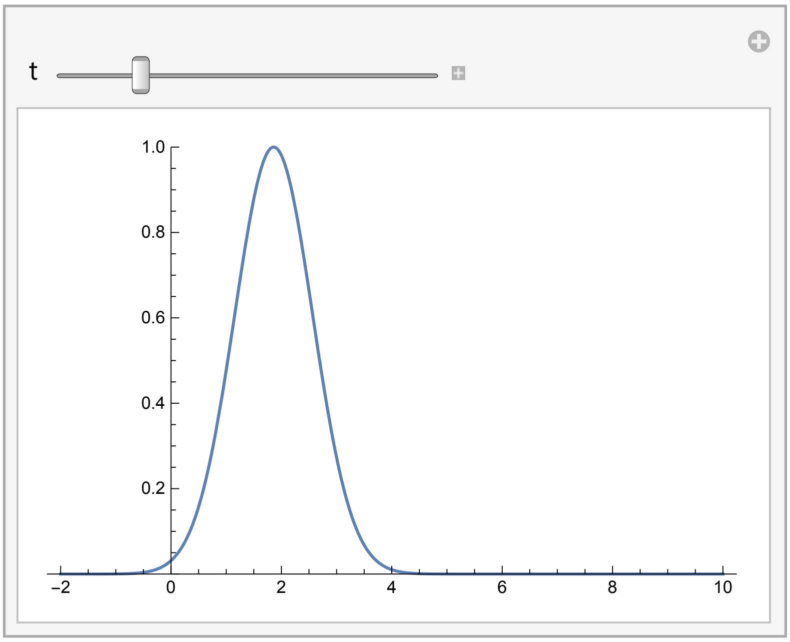
Решение представляет собой **бегущую волну** (traveling wave), т.е. волну, которая движется без изменения формы. Волна движется вправо, т.к. $u_0 > 0$.

In[6]:= `Plot3D[r[x, t], {x, -2, 10}, {t, 0, 10}, AxesLabel → Automatic]`

Out[6]=


Покажем, что **пространственный профиль** e^{-x^2} движется без искажений со скоростью $u_0 = 1 > 0$ вправо

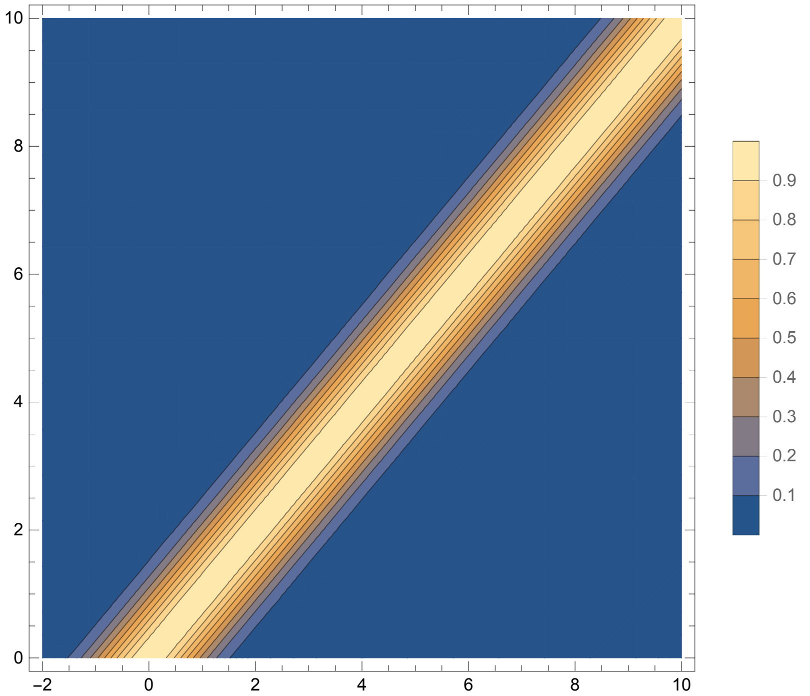
In[7]:= `Manipulate[Plot[r[x, t], {x, -2, 10}, PlotRange → {Automatic, {0, 1}}], {t, 0, 10}]`

Out[7]=


Построим **характеристики или характеристические кривые**, которые являются линиями уровня для плотности

In[8]:=
```
ContourPlot[r[x, t], {x, -2, 10}, {t, 0, 10}, PlotLegends → Automatic]
```

Out[8]=



Для уравнения переноса характеристиками являются параллельные прямые.

Решение невязкого уравнения Бюргерса

Невязкое уравнение Бюргерса является частным случаем уравнения непрерывности, когда скорость потока частиц равна плотности. Построим аналитическое решение уравнения переноса в общем виде

```
ClearAll[r, r0]
```

```
DSolve[D[r[x, t], t] + r [x, t] D[r[x, t], x] == 0, r[x, t], {x, t}]
```

```
Solve[r[x, t] == C[1][x - t r[x, t]], r[x, t]]
```

Определим конкретный вид для начального условия, который соответствует смене красного цвета светофора на зеленый при моделировании дорожного трафика

```
r0[x_] := Which[x ≤ 0, -1 (*пробка*), x > 0, 1 (*пустая дорога*)];
```

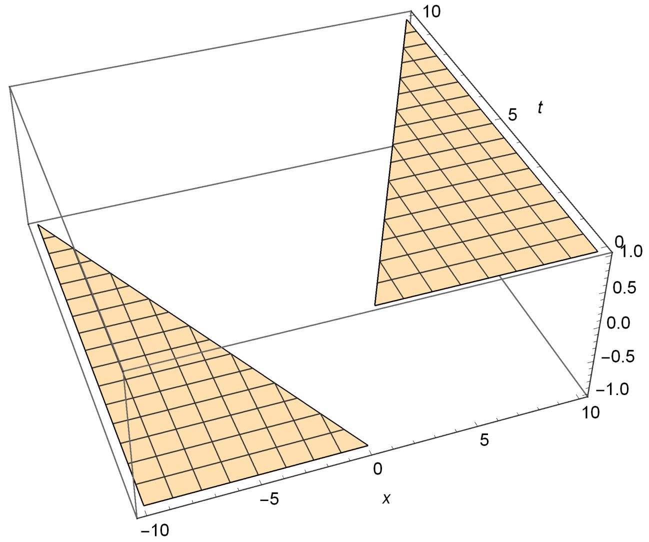
```
Solve[r == r0[x - t r] && t ≥ 0, r] // FullSimplify
```

```
{{r → ConditionalExpression[-1, t > 0 && t + x < 0]},
 {r → ConditionalExpression[1, 0 < t < x]}}
```

```
r = r /. %
```

```
{ConditionalExpression[-1, t > 0 && t + x < 0], ConditionalExpression[1, 0 < t < x]}
```

```
Plot3D[r, {x, -10, 10}, {t, 0, 10}, AxesLabel → Automatic]
```



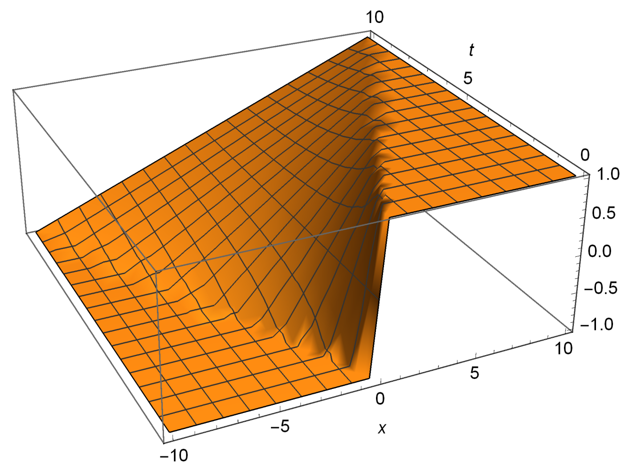
Решение является разрывным при $x = 0$, $t = 0$ из-за начального условия и неопределенным при $-t < x < t$.

Доопределим решение при $-t < x < t$, аппроксимируя плотность непрерывной функцией

```
ClearAll[r]
```

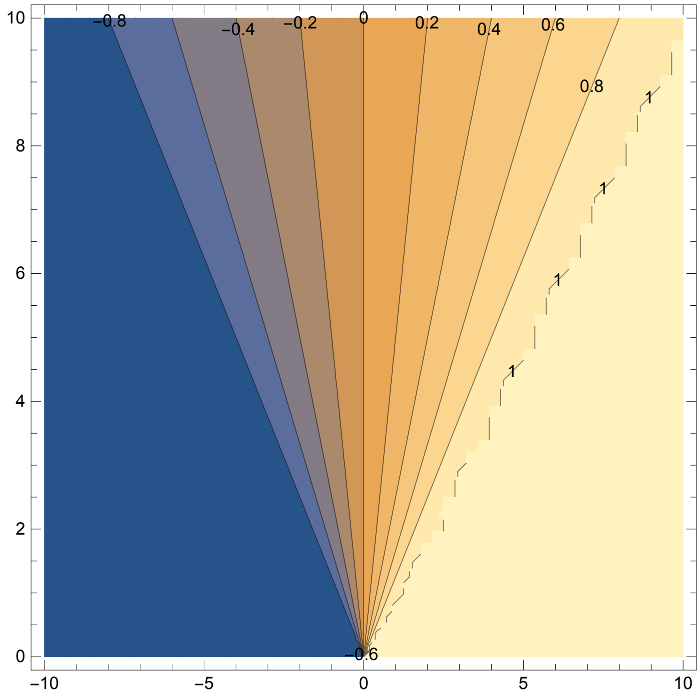
```
r[x_, t_?NonNegative] :=
  Which[x ≤ -t, -1 (*пробка*), -t < x < t, x/t, x > t, 1 (*пустая дорога*)];
```

```
Plot3D[r[x, t], {x, -10, 10}, {t, 0, 10}, AxesLabel → Automatic]
```



Построим **характеристики или характеристические кривые**, которые являются линиями уровня для плотности

```
ContourPlot[r[x, t], {x, -10, 10}, {t, 0, 10}, ContourLabels → True]
```



По графику видно, что характеристические линии пересекаются при $x = 0$, $t = 0$. В уравнении переноса характеристические линии всегда параллельные.

Задание 1. Перенос загрязнения в притоке реки

Содержательная постановка задачи

[1, раздел 4.1 стр. 93--97] В притоке реки за 10^4 м до впадения притока в реку происходит выброс химической субстанции в течении 5 мин. Начальное содержание субстанции в воде составляет 10%, т.е. плотность субстанции в воде равна 0.1 $(\text{мин} * \text{м})^{-1}$ в период выброса. Скорость потока в месте выброса равна 60 м/мин. Приток расширяется и скорость потока воды падает на 20% в месте впадения притока в реку. Каждую минуту 1% субстанции оседает на дно реки.

Концептуальная постановка задачи

- Приток реки описывается прямой линией. Совмещаем ось Ox с направлением движения воды в притоке реки. Полагаем, что выброс химической субстанции осуществляется в точке $x = -a$, и за 5 мин химическая субстанция с плотностью $\gamma = 0.1$ $(\text{мин} * \text{м})^{-1}$ заполняет отрезок реки от $[-a, 0]$. С учетом того, что скорость в момент выброса $u_0 = 60$ м/мин, не учитывая расширения притока в течении 5 мин имеем, что $a = u_0 * 5$ мин $= 300$ м. $x = L$ -- место впадения притока в реку, где $L = 10^4$ м.
- Полагаем, что плотность химической субстанции в притоке реки описывается функцией $\rho = \rho(x, t)$, где $0 \le x \le L$.
- Полагаем, что выброс химической субстанции заканчивается в момент времени $t = 0$. Тогда начальное условие $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ для плотности химической субстанции задается следующей функцией: $\rho_0(x) = \gamma$ для $x \in [-a, 0]$ и $\rho_0(x) = 0$ для $x \ge 0$.

- Из-за расширения притока скорость потока u будет зависеть от x. Известно, что в точке $x = 0$ скорость $u(x) = u_0$ и при $x = L$ скорость потока падает на 20%. Тогда можно построить зависимость $u(x) = u_0(1 - \alpha x)$, где $\alpha = \frac{0.2}{10^4}\text{м}^{-1}$, $x \geq 0$.
- Оседание на дно реки задается правой частью в уравнении непрерывности в виде $f(x, t) = -\beta\,\rho(x, t)$, где β=0.01 мин$^{-1}$.

Задачи

1. Постройте математическую модель переноса частиц химического вещества в притоке реки для $0 \leq x \leq L$ и $t \geq 0$ на основе концептуальной постановки задачи.
2. Постройте аналитическое решение математической модели с помощью метода характеристик и сравните с решением, полученным с помощью функции DSolve.
3. Оцените временной интервал, в течение которого химическая субстанция будет попадать в реку. Для этого по аналитическому решению для плотности химической субстанции необходимо найти ограничения по времени, при которых плотность субстанции в месте впадения притока в реку $\rho(L, t) > 0$. Сравните с результатом из [1, раздел 4.1 стр. 93--97], 186 мин $\leq t^* \leq$ 191 мин.
4. Количество химической субстанции, попавшей в приток реки в месте выброса, вычислим по формуле $\int_0^{5\,\text{мин}} \gamma\, dt = 0.5\ \text{м}^{-1}$. Оцените количество химической субстанции, которое попадет в реку. Для этого необходимо вычислить интеграл по времени от функции плотности в месте впадения притока в реку $\rho(L, t)$ по временному интервалу из предыдущего пункта. Какое количество химической субстанции осядет на дно до момента впадения в реку?

Задание 2. Перенос загрязнения в притоке реки

Выполните Задание 1 при изменении одного из условий в концептуальной поставке задачи, а именно, что приток реки сужается и скорость потока воды описывается соотношением $u(x) = u_0(1 + \alpha x)$, где $\alpha = \frac{0.2}{10^4}\text{м}^{-1}$.

Задание 3. Моделирование дорожного трафика

Дорожный трафик можно описывать с помощью уравнения непрерывности для плотности автомобилей $\rho(x, t)$ в предположении движения автомобилей по прямой линии и заданной скорости потока, зависящей только от плотности $v(\rho) = v_{\max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$.

В безразмерных переменных математическая модель записывается в виде невязкого уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

и начального условия

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x). \qquad (2)$$

Отметим, что в безразмерных переменных плотность потока $-1 \leq \rho(x, t) \leq 1$, где значение

$\rho = -1$ соответствует пробке на дороге, $\rho = 1$ -- умеренному трафику, $\rho = 1$ -- пустой дороге.

Задачи

1. Постройте аналитическое решение математической модели с помощью метода характеристик и изобразите график плотности для начального условия вида

$\rho_0(x) = 1$ при x<0,

$\rho_0(x) = 1 - x$ при 0≤x≤1,

$\rho_0(x) = 0$ при x>1.

Задание 4 (необязательное). Моделирование дорожного трафика в туннеле

[2, стр. 253] Дорожный трафик в туннеле можно описывать с помощью уравнения переноса для плотности автомобилей $\rho(x, t)$ в предположении движения по прямой линии и заданной скорости потока, зависящей от плотности $v(\rho) = v_{max}$ при $0 \le \rho \le \rho_c$ и $v(\rho) = \frac{v_{max} \log(\frac{\rho_{max}}{\rho})}{\log(\frac{\rho_{max}}{\rho_c})}$ при $\rho_c \le \rho \le \rho_{max}$.

Полагаем, что въезд в туннель расположен в точке $x = 0$ и автомобили при максимальной плотности ожидают открытия туннеля в момент времени $t = 0$.

$\rho_0(x) = \rho_{max}$ при x<0,

$\rho_0(x) = 0$ при x>0.

Задачи

1. Постройте математическую модель рассматриваемой задачи.
2. Постройте решение математической модели и изобразите график плотности автомобилей для значений параметров $\rho_c = 7$ машин/км, $\rho_{max} = 110$ машин/км, $v_{max} = 90$ км/ч.

Задание 5. Солитоны

Солитон -- уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость при движении и столкновении с себе подобными уединенными волнами.

Уравнение Кортевега-де Фриза (построено в 1895 году)

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 6\, u(x, t)\, \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

описывает отклонение поверхности воды от положения равновесия при определенных предположениях. В частности, длина волны должна быть существенно больше глубины слоя воды (длинная волна).

Двусолитонное решение уравнения Кортевега-де Фриза строится по формуле, см., например, [3, стр. 580]

$$u(x,\ t) = \frac{\partial^2 \log(F(x,\ t))}{\partial x^2},\ F(x,\ t) = 1 + f_1(x,\ t) + f_2(x,\ t) + A\, f_2(x,\ t)\, f_1(x,\ t), \tag{4}$$

где $f_i(x,\ t) = e^{\theta_i(x,t)}$, $\theta_i(x,\ t) = -t\, a_i^3 + x\, a_i + \delta_i$, $A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$.

Задачи

1. Постройте аналитическое решение уравнения Кортевега-де Фриза с помощью функции DSolve и убедитесь, что решение представляет собой бегущую волну.
2. Покажите, что решение вида (4) удовлетворяет уравнению Кортевега-де Фриза.
3. Осуществите динамическую визуализацию двусолитонного решения уравнения Кортевега-де Фриза при различных значениях параметров a_1, a_2, δ_1, δ_2. Обратите внимание на характер взаимодействия солитонов при их столкновении.

Литература

[1] A. Juengel. Mathematische Modellierung mit Differentialgleichung, Vorlesungsskript, 2003.

[2] S. Salsa. Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory, Springer, 2016.

[3] G.B. Whitham. Linear and Nonlinear Waves, Wiley, 1999.