

# Лабораторная работа №5

## Дискретные математические модели

Мат. моделирование динамических процессов 1

БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр

специальность Компьютерная математика и системный анализ

апрель 2020

ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

## Задание 1. Дискретные модели популяционной динамики

Рассмотрим динамические системы с дискретным временем, которые используются в качестве математических моделей популяционной динамики:

**Модель Бевертон-Холта**

$$N_{n+1} = \frac{r N_n}{1 + N_n}, \quad \text{где } r > 0.$$

**Безразмерная модель Рикера**

$$N_{n+1} = N_n e^{r(1-N_n)}, \quad \text{где } r > 0.$$

### Задачи

1. Найдите неподвижные точки  $N^*$  дискретных моделей, при условии, что численность популяции  $N \geq 0$ . Исследуйте неподвижные точки на устойчивость. Найдите бифуркационные значения параметров для неподвижных точек (значения параметров, при которых собственное значение одномерной дискретной динамической системы, вычисленное в неподвижной точке, равно по модулю 1).
2. Постройте графики решений дискретных динамических систем для начальных состояний  $N_0$ , взятых в окрестности неподвижных точек. При этом постройте решения при различных значениях параметров, когда одна и та же неподвижная точка является устойчивой и неустойчивой. Для построения решений дискретных динамических систем можно использовать функцию **RecurrenceTable**.

In[1]:= ? RecurrenceTable

RecurrenceTable[eqns, expr, {n, n<sub>max</sub>}] generates a

list of values of expr for successive n based on solving the recurrence equations eqns.

RecurrenceTable[eqns, expr, nspec] generates a list of values of expr over the range of n values specified by nspec.

RecurrenceTable[eqns, expr, {n1, ...}, {n2, ...}, ...] generates an array of values of expr for successive n1, n2, ... . >>

Пример построения последовательности чисел Фибоначчи как решения двумерной дискретной динамической системы

```

In[2]:= RecurrenceTable[{fib[n + 1] == (0 1 / 1 1).fib[n], fib[0] == {1, 1}}, fib, {n, 0, 20}][[ ; , 1]]
Out[2]= {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946}

In[3]:= Table[Fibonacci[n], {n, 20}]
Out[3]= {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765}

```

## Задание 2. Регуляция численности насекомых-вредителей

[1, стр. 99, упр. 3.2], [4, стр. 77, упр. 6], [7, стр. 128, упр. 6] Для контроля численности насекомых-вредителей  $N$  была предложена стратегия внесения извне в общую популяцию стерильных насекомых с постоянной численностью  $S > 0$ . Одна из математических моделей, описывающих получающуюся в результате популяционную динамику, имеет следующий вид:

$$N_{n+1} = \frac{R N_n^2}{(R-1) N_n^2 / M + N_n + S}, \text{ где параметры } R > 1, M > 0.$$

### Задачи

1. Найдите неподвижные точки и исследуйте их на устойчивость.
2. Найдите критическое значение численности стерильных насекомых  $S_c = S_c(R, M)$ , такое, что если  $S > S_c$ , то популяция насекомых-вредителей вымирает. Постройте графики решений дискретных динамических систем для начальных состояний  $N_0$ , взятых в окрестности неподвижной точки  $N^* = 0$ , при  $S < S_c$  и  $S > S_c$ .

## Задание 3. Бифуркационная диаграмма дискретной логистической модели

Рассмотрим дискретную логистическую модель

$$N_{n+1} = k N_n (1 - N_n), \quad k > 0.$$

Известно, что для значений параметра  $0 < k < 1$  неподвижная точка  $N^* = 0$  является асимптотически устойчивой (аттрактор). Это означает, что при любом начальном значении  $N_0$  решение дискретной динамической системы стремится к нулю.

Построим решение дискретной динамической системы с помощью функции **RecurrenceTable** при  $k = 0.9$  и начального состояния  $N_0 = 0.5$  и убедимся, что решение стремится к нулю.

```

In[4]:= k = 0.9;

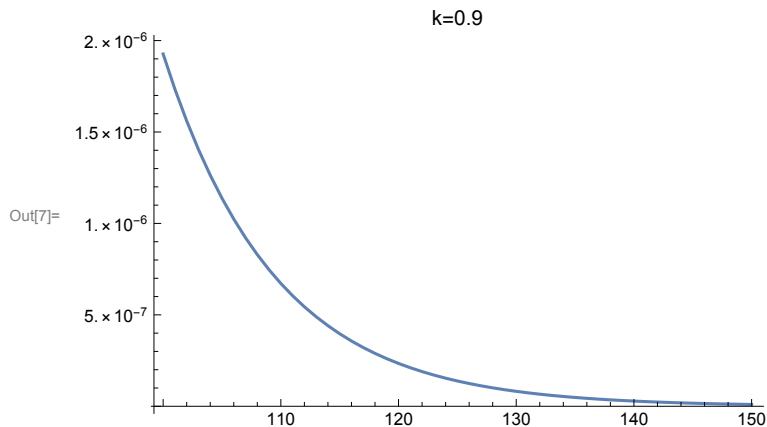
In[5]:= data = RecurrenceTable[{NN[n + 1] == k NN[n] (1 - NN[n]), NN[0] == 0.5}, NN, {n, 100, 150}];

Создадим координаты соответствующих точек и построим график

In[6]:= data = {Range[100, 150], data} // Transpose;

```

```
In[7]:= ListPlot[data, Joined → True, PlotLabel → "k=0.9"]
```



Известно, что для значений параметра  $1 < k < 3$  неподвижная точка  $N^* = 1 - \frac{1}{k}$  является асимптотически устойчивой (аттрактор). Это означает, что при любом начальном значении  $N_0$  решение дискретной динамической системы стремится к значению  $1 - \frac{1}{k}$ .

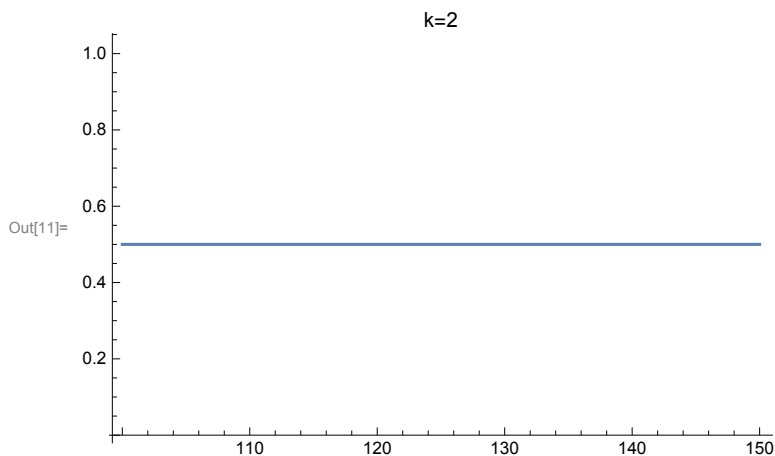
Построим решение дискретной динамической системы при  $k = 2$  и начального состояния  $N_0 = 0.5$  и убедимся, что решение стремится к  $N^* = 1 - \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ .

```
In[8]:= k = 2;
```

```
In[9]:= data = RecurrenceTable[{NN[n + 1] == k NN[n] (1 - NN[n]), NN[0] == 0.5}, NN, {n, 100, 150}];
```

```
In[10]:= data = {Range[100, 150], data} // Transpose;
```

```
In[11]:= ListPlot[data, Joined → True, PlotLabel → "k=2"]
```



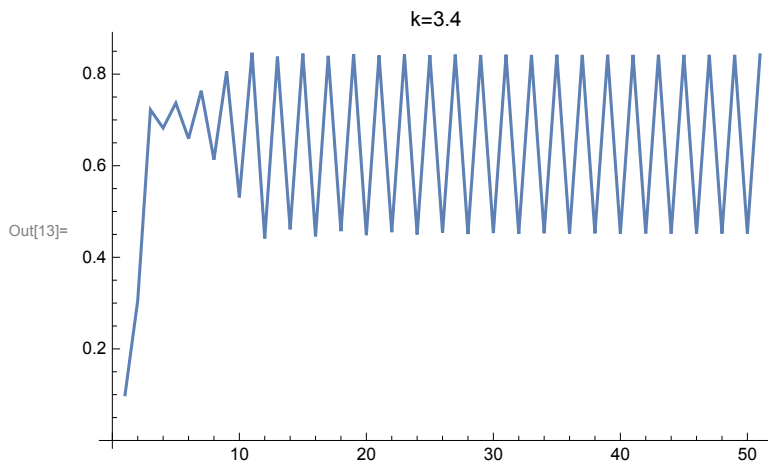
## Задачи

1. Проанализируйте устойчивость неподвижных точек для композиции  $f^2(x)$  и покажите, что для значений  $3 < k \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$  периодические решения с циклом длины 2 являются устойчивыми.

Построим решение дискретной динамической системы при  $k = 3.4$  и начального состояния  $N_0 = 0.1$  и убедимся, что решение стремится к периодическому решению с циклом длины 2.

```
In[12]:= k = 3.4;
```

```
In[13]:= ListPlot[RecurrenceTable[{NN[n + 1] == k NN[n] (1 - NN[n]), NN[0] == 0.1}, NN, {n, 0, 50}],
  Joined -> True, PlotLabel -> "k=3.4"]
```

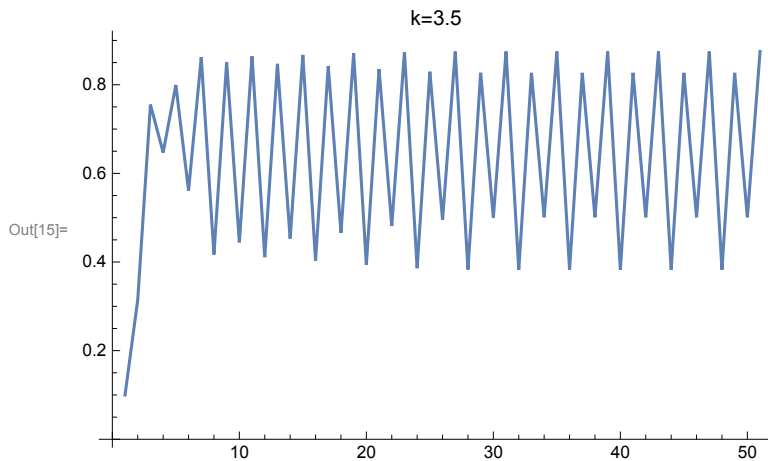


2. Проанализируйте устойчивость неподвижных точек для композиции  $f^4(x)$  и покажите, что для значений  $3.449 < k < 3.54409$  периодические решения с циклом длины 4 являются устойчивыми.

Построим решение дискретной динамической системы при  $k = 3.5$  и начального состояния  $N_0 = 0.1$  и убедимся, что решение стремится к периодическому решению с циклом длины 4.

```
In[14]:= k = 3.5;
```

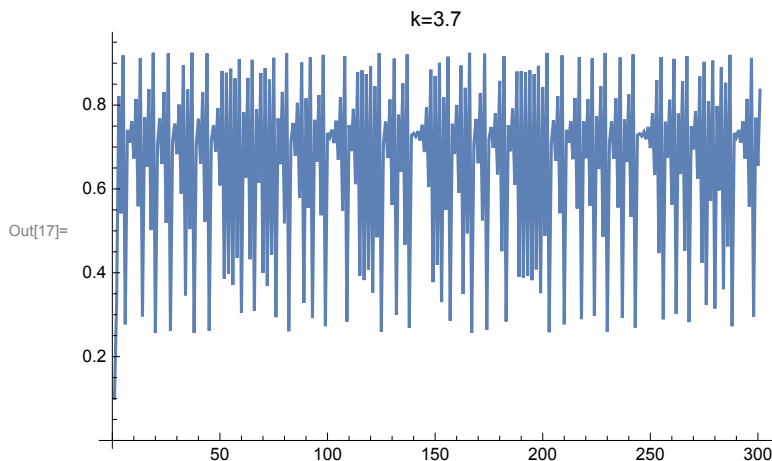
```
In[15]:= ListPlot[RecurrenceTable[{NN[n + 1] == k NN[n] (1 - NN[n]), NN[0] == 0.1}, NN, {n, 0, 50}],
  Joined -> True, PlotLabel -> "k=3.5"]
```



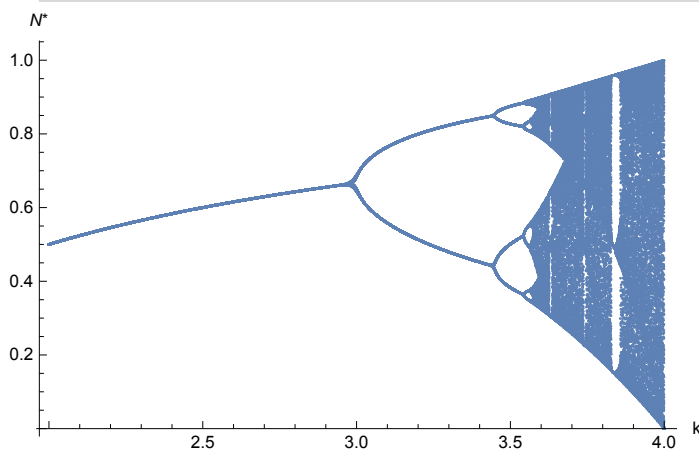
$k^* \approx 3.569946$  является пределом формирования циклов с периодом  $2^p$  и при  $k^*$  осуществляется переход к хаотическому поведению решения дискретной логистической модели, т.е. при  $k > k^* \approx 3.569946$  решение является непериодическим. Это пример детерминированного хаоса.

```
In[16]:= k = 3.7;
```

```
In[17]:= ListPlot[RecurrenceTable[{NN[n + 1] == k NN[n] (1 - NN[n]), NN[0] == 0.1}, NN, {n, 0, 300}],
  Joined -> True, PlotLabel -> "k=3.7"]
```



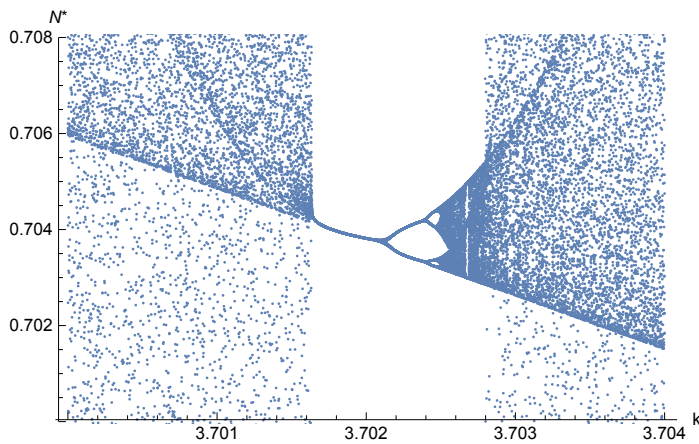
3. Постройте бифуркационную диаграмму в фазово-параметрическом пространстве  $(k, N^*)$  для дискретной логистической модели при  $2 \leq k \leq 4$ .



Для построения бифуркационной диаграммы необходимо изменять значение параметра  $k$  с малым шагом, например, равным 0.001, и для каждого значения параметра изображать на графике значения соответствующего решения на итерациях  $100 \leq n \leq 150$ , полагая, что при заданные  $n$  будут соответствовать выходу решения на неподвижные точки.

Обратите внимание на появление промежутков с периодическим поведением при  $k > k^* \approx 3.569945$ .

4. Постройте бифуркационную диаграмму в фазово-параметрическом пространстве  $(k, N^*)$  для дискретной логистической модели (6) при  $3.7 \leq k \leq 3.704$ .



Это иллюстрация свойства самоподобия детерминированных систем с хаотическим поведением или фрактальной структуры решения, когда поведение фрагмента области подобно всей области.

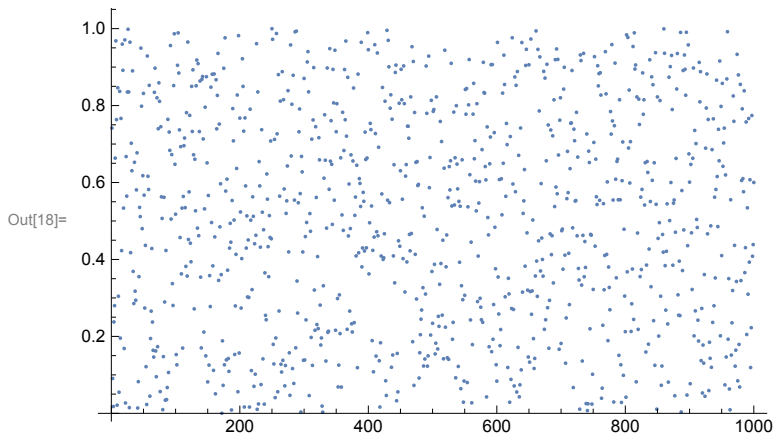
## Задание 4. Генерация последовательности псевдослучайных чисел

Существование режимов хаотического поведения дискретных динамических систем используется для построения последовательностей псевдослучайных чисел.

Примером может служить следующая динамическая система для генерации чисел, равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$

$$x_{n+1} = |100 \log[x_n] \bmod 1|, \quad x_0 = 0.1.$$

```
In[18]:= RecurrenceTable[
  {x[n + 1] == Abs[Mod[100 Log[x[n]], 1]], x[0] == 0.1}, x, {n, 1, 1000}] // ListPlot
```



Отметим, что остаток от деления на 1 возвращает дробную часть для положительного числа

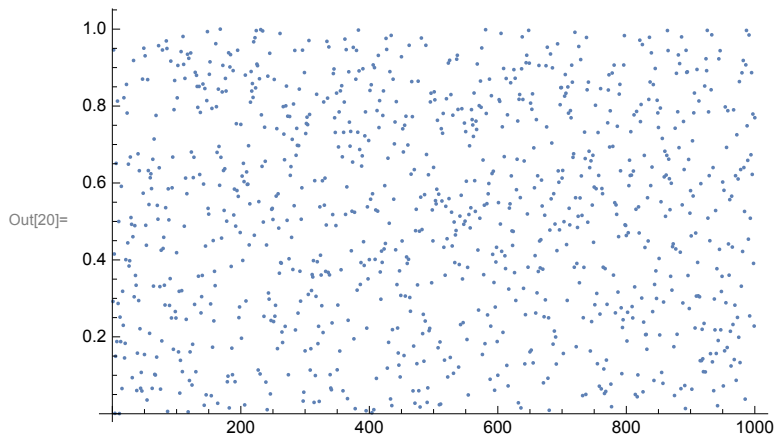
```
In[19]:= {Mod[0.3, 1], Mod[-0.3, 1]}
```

```
Out[19]= {0.3, 0.7}
```

## Задачи

1. Сравните математическое ожидание (**Mean**) и дисперсию (**Variance**) для сгенерированной последовательности с аналогичными характеристиками встроенной функции **UniformDistribution**, имитирующей непрерывное равномерное распределение случайной величины на заданном отрезке.

In[20]:= `RandomVariate[UniformDistribution[{0, 1}], 1000] // ListPlot`



2. Найдите в литературе другой пример дискретной динамической системы для генерации равномерно распределенных чисел, например, см. [6]. Визуализируйте случайные числа, посчитайте математическое ожидание и дисперсию.

---

## Литература

- [1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. -- 2011.
- [2] М. Г. Юмагулов. Введение в теорию динамических систем. -- СПб.: Издательство "Лань", 2015.
- [3] S. Lynch. Dynamical Systems with Applications using Mathematica.. -- Birkhauser, 2007.
- [4] J. D. Murray. Mathematical biology. I. An introduction. -- Springer, 2002.
- [5] R. A. Holmgren. A first course in discrete dynamical systems. -- Springer, 1996.
- [6] Д. Кнут. Искусство программирования для ЭВМ. Т.2: . -- М.: Мир, 1977.
- [7] Д. Мюррей. Математическая биология. Т.1. Введение: . -- М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2009.