Лабораторная работа №4

Математические модели с запаздыванием

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
март 2020
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. Метод шагов (метод последовательного интегрирования)

Постройте пользовательскую функцию **solveDelay[f_, T_, {t0_, tend_}, phi_]**, которая реализует метод шагов для основной начальной задачи для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом при $T = \text{const} > 0$

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(t), x(t-T)), && t_0 < t \le t_{end} \\ &x(t) = \phi(t), && t_0 - T \le t \le t_0 \end{aligned} \tag{1}$$

где начальная функция $\phi(t)$ задана на начальном множестве $t_0 - T \le t \le t_0$ и $x(t) = \phi(t)$ на начальном множестве.

Реализация алгоритма возможна с помощью встроенных функций **NestList** или **Piecewise**. Для решения обыкновенного дифференциального уравнения на каждом шаге можно использовать функцию **NDSolve.**

Задание 2. Линейное уравнение с запаздывающим аргументом

Для линейного уравнения с запаздывающим аргументом

$$x'(t) = -\frac{\pi x(t-T)}{2T} \tag{2}$$

1. проверьте, что $x(t) = C\cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$ является решением уравнения (2);
2. постройте решение некоторой начальной задачи для (2) с помощью метода шагов из Задания 1 и с помощью NDSolve; изобразите графики решений в одной графической области.

Задание 3. Модель Хатчинсона

Математическая модель

Рассмотрим модель Хатчинсона (логистическая модель с запаздывающим аргументом) для безразмерных переменных

$$\begin{aligned} &N'(t) = N(t)\,(1 - N(t-T)), && t > 0 \\ &N(t) = 0.8\,(1+t), && -T \le t \le 0 \end{aligned} \tag{3}$$

где начальная функция $\phi(t) = 0.8\,(1+t)$ задана на начальном множестве $-T \le t \le 0$.

Задачи

1. Изобразите в одной системе координат графики решений $N(t)$ модели (3), построенные методом шагов из Задания 1 на отрезке $[0,\ 10\,T]$ для различных значений T. Рассмотрите случаи $0 < T < \frac{\pi}{2}$, $T = \frac{\pi}{2}$, $T > \frac{\pi}{2}$.
2. Изобразите в одной системе координат графики решений $N(t)$ модели (3), построенные с помощью NDSolve на отрезке $[0,\ 10\,T]$ для различных значений T. Рассмотрите случаи $0 < T < \frac{\pi}{2}$, $T = \frac{\pi}{2}$, $T > \frac{\pi}{2}$.
3. На основе построенных графиков сформулируйте выводы о поведении решения логистической модели при $t \to \infty$ для случаев $0 < T < \frac{\pi}{2}$, $T = \frac{\pi}{2}$, $T > \frac{\pi}{2}$. Определите характер устойчивости положения равновесия $N(t) \equiv 1$.

Обратите внимание, что величина запаздывания в модели Хатчинсона влияет на качественное поведение решения.

Задание 4. Модель регуляции концентрации клеток крови

Математическая модель

$$\begin{aligned} &c'(t) = \frac{\lambda\, a^m\, c(t-T)}{a^m + (c(t-T))^m} - g\, c(t), && t > 0 \\ &c(t) = \phi(t), && -T \le t \le 0 \end{aligned} \tag{4}$$

где $c(t)$ -- концентрация клеток крови, $T > 0$ -- временная задержка в воспроизводстве новых клеток крови и поступлении их в кровоток, $\lambda > 0$, $a > 0$, $m > 0$, $g > 0$ -- заданные параметры модели. Первое слагаемое в правой части отвечает за воспроизводство клеток, второе слагаемое -- за гибель клеток.

При обезразмеривании концентрации $c^* = c/a$ уравнение (4) запишется в виде

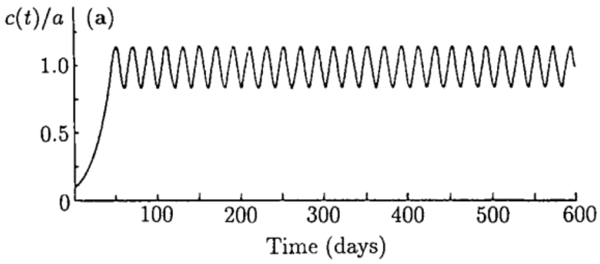
$$\frac{d c^*(t)}{d t} = \frac{\lambda\, c^*(t-T)}{1 + (c^*(t-T))^m} - g\, c^*(t). \tag{5}$$

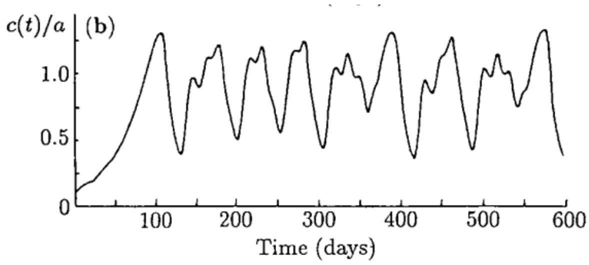
Задачи

1. Постройте решение начальной задачи для безразмерного уравнения (5) методом шагов для случаев
(a) $\lambda = 0.2\,\text{day}^{-1}$, $m = 10$, $g = 0.1\,\text{day}^{-1}$, $T = 6$ days,
(b) $\lambda = 0.2\,\text{day}^{-1}$, $m = 10$, $g = 0.1\,\text{day}^{-1}$, $T = 20$ days.

Значения параметров соответствуют лейкоцитам. Определите начальную функцию $\phi(t) = 0.1$ на начальном множестве $-T \le t \le 0$.

Сравните построенное решение с приведенными ниже численными решениями из [1, стр. 27, Рис. 1.15] для случаев (a) и (b), соответственно.





Из уравнения (5) покажите, что для значений параметров $\lambda = 0.2\,\text{day}^{-1}$, $m = 10$, $g = 0.1\,\text{day}^{-1}$ одним из положений равновесия является решение $c^*(t) \equiv 1$.

Интерпретация результатов. Шестидневный период является нормой для изменения концентрации лейкоцитов в крови человека. Увеличение периода приводит к апериодическому изменению концентрации и может являться причиной некоторых болезней человека.

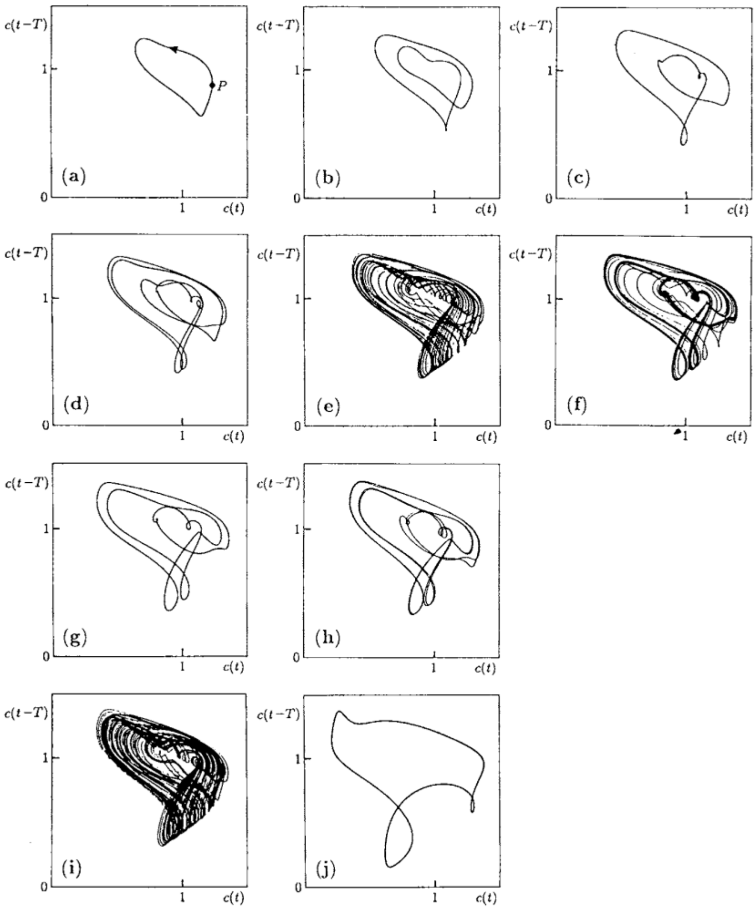
Обратите внимание, что величина запаздывания влияет на качественное поведение решения. Важный результат системного анализа: если запаздывания можно сделать больше или меньше, то это можно использовать как мощный рычаг воздействия на систему.

2. Качественное поведение решения для рассматриваемой модели (периодические движения или хаотические (апериодические) движения) можно определить по траекториям в фазовой плоскости $(c(t),\, c(t-T))$.

Постройте фазовые траектории решений начальной задачи для безразмерного уравнения (5) при фиксированных значениях параметров $\lambda = 2$, $g = 1$, $T = 2$ и различных значениях параметра $m = \{7,\ 7.75,\ 8.5,\ 8.79,\ 9.65,\ 9.69715,\ 9.6975,\ 9.76,\ 10,\ 20\}$.

Определите начальную функцию $\phi(t) = 0.5$ на начальном множестве $-T \le t \le 0$.

Сравните с аналогичными фазовыми траекториями решений из [1, стр. 29, Рис. 1.16], [3, Рис. 6].



На основе построенных фазовых траекторий сформулируйте выводы о поведении решения модели (5) при $t \to \infty$ для различных значений параметра m (колебания, хаотичное поведение).

Литература

[1] J. D. Murray. Mathematical Biology. I. An Introduction -- Springer, 2001.

[2] Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. -- М.: Наука, 1971.

[3] L. Glass, M. C. Mackey. Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems. Ann. N. Y. Acad. Sci., 316:214--235, 1979.

[4] А. Д. Мышкис. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. -- М.: Наука, 1972.

[4] Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков. Математические модели динамических систем с запаздыванием. -- Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2012.