Лабораторная работа №1

Математические модели динамики численности популяции одного вида

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
февраль 2020
доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. Модель Мальтуса

Теоретические сведения

Модель Мальтуса, или модель экспоненциального роста (1798) является одной из простейших моделей численности популяции одного вида. Модель предложена Мальтусом для описания роста населения Земли. Она описывает численность популяции N при отсутствии сдерживающих факторов (болезни, хищники, конкурирующие виды, ограниченность питания).

Рассмотрим популяцию больших размеров, численность которой измеряется миллионами и более. Тогда можно предполагать, что каждый индивидуум имеет равные шансы родить и равный шанс умереть в течение определенного промежутка времени. Таким образом, имеет смысл говорить о *коэффициенте рождаемости и о коэффициенте смертности на одного индивидуума в единицу времени*.

Имеем следующие предположения в рамках моделирования:

- численность популяции рассматривается как непрерывная функция времени;
- не существует сдерживающих факторов роста популяции;
- популяции достаточно велики, чтобы игнорировать случайные различия между отдельными особями;
- рождения и смерти непрерывны во времени;
- игнорируется иммиграция и эмиграция.

В основу модели Мальтуса положено простое утверждение, что скорость изменения численности популяции $N'(t)$ пропорциональна ее текущей численности $N(t)$ в момент времени t, с коэффициентом пропорциональности, равным разности коэффициентов рождаемости $\alpha(t) \geq 0$ и смертности $\beta(t) \geq 0$

$$N'(t) = (\alpha(t) - \beta(t))\,N(t). \tag{1}$$

Моделью Мальтуса называют задачу Коши для уравнения (1) при заданном начальном условии в момент времени $t = t_0$

$$N'(t) = (\alpha(t) - \beta(t))\, N(t),$$
$$N(t_0) = N_0. \qquad (2)$$

Предположение вида “скорость изменения величины пропорциональна значению самой величины (или некоторой функции от нее)” широко используется в различных областях знаний. В частности, уравнение (1) весьма похоже на уравнение радиоактивного распада.

Модель Мальтуса является примером применения аналогий при построении моделей объектов, для которых невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым они подчиняются.

Задания

1. Постройте аналитическое решение модели Мальтуса (например, методом разделения переменных) для заданной численности населения N_0 в начальный момент времени t_0. Сравните построенное решение и решение, полученное с помощью функции **DSolve**

```
ClearAll[t0, N0];
```

```
sol = DSolve[{NN'[t] == (α[t] - β[t]) NN[t], NN[t0] == N0}, NN[t], t]
```

$$\left\{\left\{NN[t] \to e^{-\int_1^{t0}\alpha[K[1]]\,dK[1]+\int_1^{t}(\alpha[K[1]]-\beta[K[1]])\,dK[1]-\int_1^{t0}-\beta[K[1]]\,dK[1]}\,N0\right\}\right\}$$

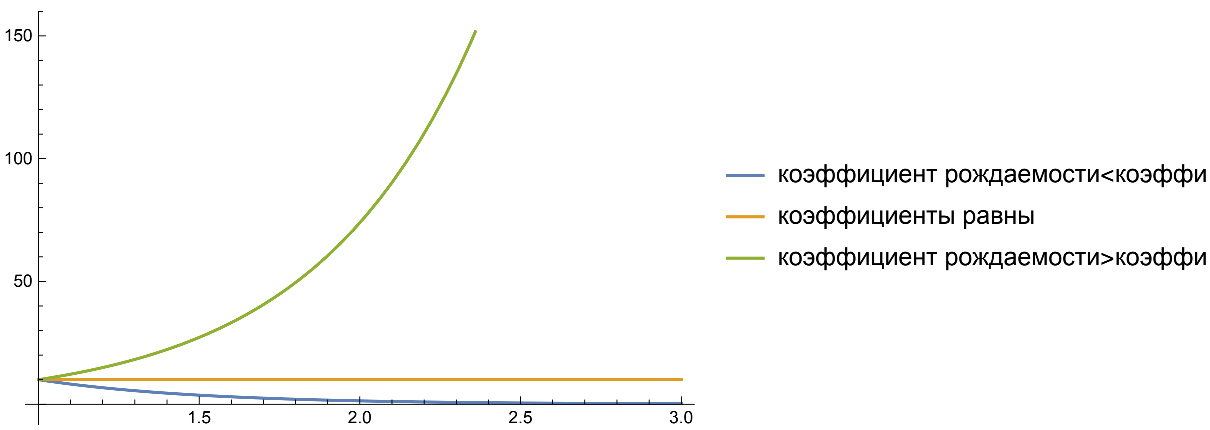
Напишите пользовательскую функцию для задания аналитического решения модели Мальтуса.

2. Постройте в одной системе координат графики функции $N(t)$ для фиксированных значений t_0 и $N_0 > 0$ и различных значений $\alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$ и $\beta(t) = \beta_0 = \text{const}$. Рассмотрите случаи $\alpha_0 < \beta_0$, $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_0 > \beta_0$.

Пример построения графиков решений с использованием результата функции DSolve.

```
t0 = 1; N0 = 10;
```

```
Plot[Evaluate[
  NN[t] /. sol /. {{α[_] → 0, β[_] → 2}, {α[_] → 2, β[_] → 2}, {α[_] → 2, β[_] → 0}}],
 {t, t0, 3}, PlotLegends → {"коэффициент рождаемости<коэффициента смертности",
   "коэффициенты равны", "коэффициент рождаемости>коэффициента смертности"}]
```



При выполнении задания необходимо использовать пользовательскую функцию для аналитического решения модели Мальтуса из пункта 1.

3. **Качественный анализ модели по решению**: На основе построенных графиков сформулируйте выводы о поведении решения модели Мальтуса при $t \to \infty$ для случаев $\alpha_0 < \beta_0$, $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_0 > \beta_0$ (например, монотонное возрастание/убывание, экспоненциальное возрастание/убывание, колебания). Является ли положение равновесия $N(t) \equiv N_0$, соответствующее совпадению коэффициентов рождаемости и смертности $\alpha_0 = \beta_0$, устойчивым?

4. **Качественный анализ модели по фазовому портрету**: Фазовое пространство для рассматриваемой динамической системы первого порядка является одномерным и представляет собой прямую линию. Изобразите фазовые траектории (функция **StreamPlot**) динамической системы для случая постоянных коэффициентов $\alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$ и $\beta(t) = \beta_0 = \text{const}$ при $\alpha_0 < \beta_0$, $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_0 > \beta_0$. Пользуясь определением устойчивости в фазовом пространстве выясните, являются ли положения равновесия динамической системы (особые точки на фазовой прямой) устойчивыми при условии $N(t) \geq 0$ в силу ограничений модели .

Задание 2. Логистическая модель (модель Ферхюльста)

Теоретические сведения

Модель Ферхюльста, или логистическая модель (1838, 1845) принимает во внимание ограниченность доступных популяции ресурсов. В частности, считается, что существует “равновесная” численность популяции $N_p > 0$**,** которую может обеспечить окружающая среда, т.е. $N(t) \to N_p$ при $t \to \infty$ (эффект насыщения численности).
При моделировании полагается также, что скорость изменения численности популяции пропорциональна самой численности, умноженной (в отличие от модели Мальтуса) на величину ее отклонения от равновесного значения

$$N'(t) = N(t)\, k \left(1 - \frac{N(t)}{N_p}\right),\ k > 0. \tag{3}$$

Логистической моделью называют задача Коши для уравнения (3) при заданном начальном условии в момент времени $t = t_0$

$$\begin{aligned} &N'(t) = N(t)\, k \left(1 - \frac{N(t)}{N_p}\right), \\ &N(t_0) = N_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Предположение о механизмах насыщения используются при построении многих моделей в различных областях знаний.

Существенным недостатком модели является тот факт, что равновесная численность популяции N_p вводится в качестве известного параметра, в то время нахождение этой величины нередко является основной задачей исследования.

Современные прогнозы показывают, что численность человечества в обозримом будущем стабилизируется на уровне $N_p = 12$ миллиардов человек. Такой же прогноз дается ООН.

Задания

1. Постройте аналитическое решение логистической модели (например, методом разделения переменных) для заданной численности населения N_0 в начальный

момент времени t_0. Сравните построенное решение и решение, полученное с помощью функции **DSolve**. Напишите пользовательскую функцию для задания аналитического решения логистической модели.

2. Постройте в одной системе координат графики функции $N(t)$ для фиксированных значений k, N_p и t_0 и различных значений N_0. Рассмотрите случаи $N_0 < N_p$, $N_0 = N_p$, $N_0 > N_p$. При выполнении задания необходимо использовать пользовательскую функцию для аналитического решения логистической модели из пункта 1.

3. **Качественный анализ модели по решению:** На основе построенных графиков сформулируйте выводы о поведении решения логистической модели при $t \to \infty$ для случаев $N_0 < N_p$, $N_0 = N_p$, $N_0 > N_p$. Является ли положение равновесия $N(t) \equiv N_p$, соответствующее случаю $N_0 = N_p$, устойчивым?

4. **Качественный анализ модели по фазовому портрету** : Фазовое пространство для рассматриваемой динамической системы первого порядка является одномерным и представляет собой прямую линию. Изобразите фазовые траектории динамической системы с помощью функции **StreamPlot**. Пользуясь определением устойчивости в фазовом пространстве выясните, являются ли положения равновесия динамической системы (особые точки на фазовой прямой) устойчивыми при условии $N(t) \geq 0$ в силу ограничений модели.

Задание 3. Нелинейный аналог модели Мальтуса

Теоретические сведения

Полагаем, что коэффициент рождаемости пропорционален численности населения (например, потому что члены популяции заинтересованы в ее росте) $\alpha(N) = \alpha_0 N$, а коэффициент смертности постоянный $\beta(t) = \beta_0 = \text{const}$, $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$. Тогда уравнение Мальтуса (1) преобразуется к виду

$$N'(t) = N(t)\,(\alpha_0\, N(t) - \beta_0) \tag{5}$$

с квадратичной нелинейностью.

Математической моделью назовем задачу Коши для уравнения (5) при заданном начальном условии в момент времени $t = t_0$

$$\begin{aligned} &N'(t) = N(t)\,(\alpha_0\, N(t) - \beta_0),\\ &N(t_0) = N_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Задания

1. Постройте аналитическое решение нелинейной модели для заданной численности населения N_0 в начальный момент времени t_0. При построении аналитического решения необходимо отдельно рассматривать случаи $N_0 < N_{кр}$, $N_0 = N_{кр}$, $N_0 > N_{кр}$, где $N_{кр} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$. При $N_0 > N_{кр}$ решение строится только на отрезке $[t_0, t^*]$, где t^* определяется из условия $\lim_{t \to t^*} N[t] = +\infty$. Сравните построенное решение и решение, полученное с помощью функции **DSolve**. Напишите пользовательскую функцию для задания аналитического решения нелинейной модели Мальтуса.

Постройте в одной системе координат графики функции $N(t)$ для фиксированных значений α_0 и β_0 и различных значений N_0. Рассмотрите случаи $N_0 < N_{кр}$, $N_0 = N_{кр}$, $N_0 > N_{кр}$, где $N_{кр} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$. При выполнении задания необходимо использовать пользовательскую функцию для аналитического решения нелинейной модели Мальтуса из пункта 1.

3. **Качественный анализ модели по решению**: На основе построенных графиков сформулируйте выводы о поведении решения нелинейной модели при $t \to \infty$ для случаев $N_0 < N_{кр}$, $N_0 = N_{кр}$, $N_0 > N_{кр}$, $N_{кр} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$. Является ли положение равновесия $N(t) \equiv N_{кр}$, соответствующее случаю $N_0 = N_{кр}$, устойчивым?
4. **Качественный анализ модели по фазовому портрету**: Фазовое пространство для рассматриваемой динамической системы первого порядка является одномерным и представляет собой прямую линию. Изобразите фазовые траектории динамической системы с помощью **StreamPlot**. Пользуясь определением устойчивости в фазовом пространстве выясните, являются ли положения равновесия динамической системы (особые точки на фазовой прямой) устойчивыми при условии $N(t) \geq 0$ в силу ограничений модели.

Задание 4. Предсказание на основании моделирования

На основе нелинейной модели сделайте предсказание о численности населения Беларуси через 100 лет. Значения параметров модели α_0, β_0, N_0, t_0 определите из базы знаний Wolfram Alpha. Сравните с аналогичными предсказаниями модели Мальтуса с постоянными коэффициентами, а также с данными из базы знаний Wolfram Alpha.

Комментарии по работе с Wolfram Alpha

Создадим объект типа “Country”, ассоциированный с данными для имени “Belarus”

```
entityBelarus = Entity["Country", "Belarus"];
```

Получим необходимые свойства объекта EntityBelarus и уберем дополнительно размерности величин

```
{N0, α0, β0} = QuantityMagnitude@EntityValue[entityBelarus, #] & /@
  {"Population", "BirthRateFraction", "DeathRateFraction"}
{9 468 338, 0.011874, 0.013346}
```

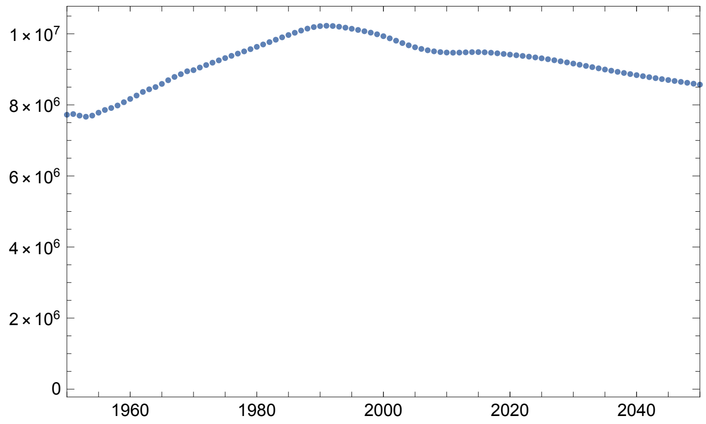
Определим дату, которой соответствуют полученные данные

```
EntityValue[entityBelarus, #, "Date"] & /@
 {"Population", "BirthRateFraction", "DeathRateFraction"}
{2017, 2017, 2017}
```

```
t0 = 2017;
```

Построим график функции для всех значений свойства “Population”, которые хранятся в базе знаний

```
DateListPlot[Dated[entityBelarus, All]["Population"],
 PlotRange → {{"1950", "2050"}, All}, Joined → False]
```



Задание 5. Определение параметров модели по реальным данным

По данным о численности населения для заданной страны в период с 1950 года до 2010 года необходимо найти значения параметров модели Мальтуса с постоянными коэффициентами, значения параметров логистической модели и нелинейной модели, полагая, что $t_0 = 1950$ и N_0 заданы. Для этого необходимо аппроксимировать данные функциями аналитических решений модели. Необходимо также построить графики относительной ошибки для найденных модельных решений в сравнении с данными о численности населения.

Страны по вариантам:

1. Россия
2. Китай
3. Япония
4. Швеция
5. Франция
6. Греция
7. Марокко
8. Великобритания
9. Германия
10. Турция
11. Нидерланды
12. Бельгия
13. Катар
14. Египет

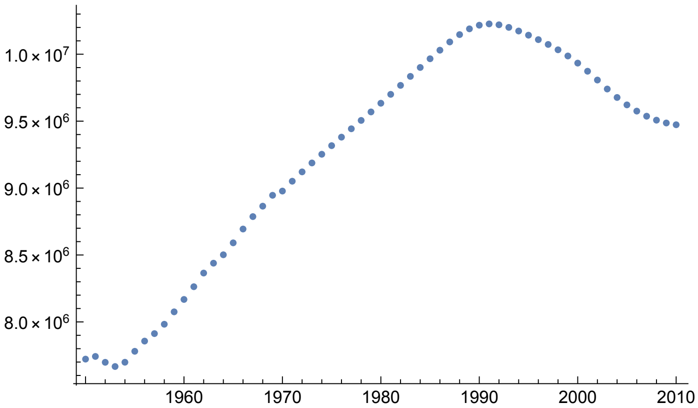
Комментарии по реализации

Воспользуемся данными из базы знаний Wolfram Alpha для Беларуси

```
data =
 {#, QuantityMagnitude@Dated[entityBelarus, #]["Population"]} & /@ Range[1950, 2010]
```

```
{{1950, 7722155}, {1951, 7742159}, {1952, 7698249}, {1953, 7666821}, {1954, 7698751},
 {1955, 7780565}, {1956, 7856790}, {1957, 7912626}, {1958, 7982625}, {1959, 8075290},
 {1960, 8167918}, {1961, 8262998}, {1962, 8365073}, {1963, 8438881}, {1964, 8501607},
 {1965, 8590786}, {1966, 8694009}, {1967, 8786887}, {1968, 8864776}, {1969, 8946091},
 {1970, 8977639}, {1971, 9051218}, {1972, 9120964}, {1973, 9187675},
 {1974, 9252678}, {1975, 9316955}, {1976, 9380452}, {1977, 9443001},
 {1978, 9505452}, {1979, 9568883}, {1980, 9633888}, {1981, 9700245},
 {1982, 9767260}, {1983, 9834424}, {1984, 9901045}, {1985, 9966154},
 {1986, 10030068}, {1987, 10091633}, {1988, 10146632}, {1989, 10189615},
 {1990, 10216846}, {1991, 10226493}, {1992, 10219918}, {1993, 10200510},
 {1994, 10173355}, {1995, 10142308}, {1996, 10109072}, {1997, 10073061},
 {1998, 10033061}, {1999, 9986933}, {2000, 9933609}, {2001, 9872961},
 {2002, 9807132}, {2003, 9740054}, {2004, 9676902}, {2005, 9621543}, {2006, 9575043},
 {2007, 9536864}, {2008, 9507331}, {2009, 9486239}, {2010, 9473071}}
```

```
ListPlot[data]
```



Следующие параметры модели полагаем заданными

```
{t0, N0} = First@data
```

```
{1950, 7722155}
```

Найдем неизвестные параметры для модели Мальтуса с использованием функции **FindFit**

```
ClearAll[k, t]
```

```
solutionMalthus = N0 Exp[k (t - t0)];
```

```
FindFit[data, solutionMalthus , {k}, t]
```

```
{k → 0.00537181}
```

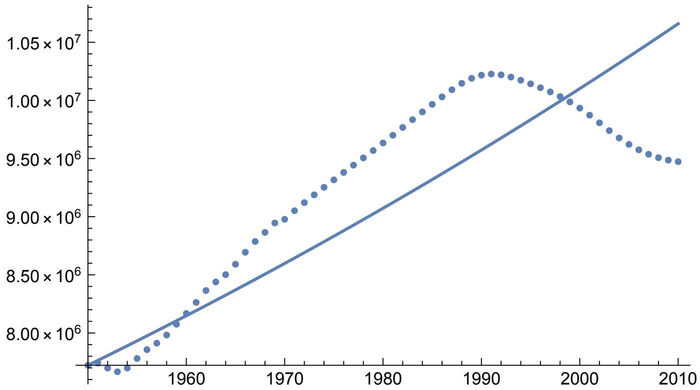
Построим решение

```
solutionMalthus = solutionMalthus /. FindFit[data, solutionMalthus , {k}, t]
```

$7722155\, e^{0.00537181\,(-1950+t)}$

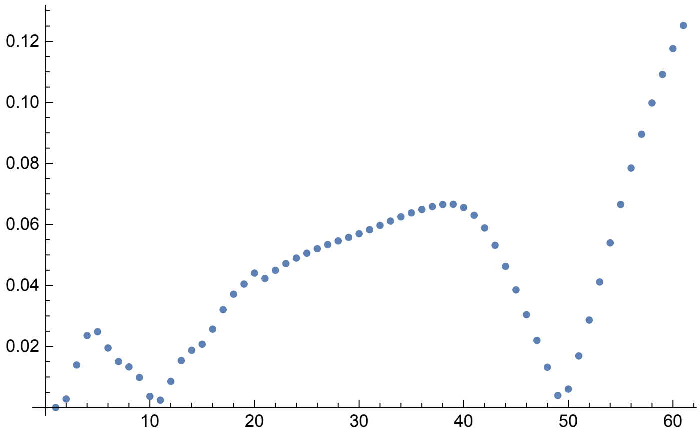
Построим график популяционной динамики на основании модели Мальтуса

```
Show[Plot[solutionMalthus, {t, 1950, 2010}], ListPlot[data]]
```



Построим график относительной ошибки

```
errorMalthus = Abs[Last@# - (solutionMalthus /. t → First@#)] / Last@# & /@ data;
ListPlot[errorMalthus]
```



Задание 6 (необязательное). Математическая модель радиоактивного распада

Постройте математическую модель радиоактивного распада вещества, используя принцип аналогии: скорость распада радиоактивного вещества пропорционален количеству этого вещества. Для информации смотрите [5, с. 18].

Используя вид аналитического решения математической модели определите, как связан коэффициент пропорциональности со временем полураспада радиоактивного вещества (временем, в течение которого распадается половина начальной массы)? Решите задачу 2.7 или 2.8 из [5, с.18].

Задание 7 (необязательное). Математическая модель распространения нового продукта на рынке

Данное задание является примером построения математической модели экономического процесса.

Постройте математическую модель распространения нового продукта или услуги на рынке (модель Басса). В качестве неизвестного рассматривается количество пользователей продукта $N(t)$. Используя принцип аналогии полагается, что за счет рекламы скорость изменения пользователей $N'(t)$ пропорциональна числу потенциальных клиентов $N_0 - N(t)$, где N_0 -- общее количество людей на рынке. Дополнительно учитывается эффект косвенной рекламы за счет общения пользователей продукта с потенциальными клиентами. Для информации смотрите [1, с. 150].

Анализируя математическую модель, определите момент времени, начиная с которого продолжать рекламу становится невыгодным. Для информации смотрите [1, с. 150].

Литература

[1] А. А. Самарский, А. П. Михайлов. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. -- М.: Физматлит, 2001.

[2] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. -- 2011.

[3] J. D. Murray. Mathematical biology. I. An introduction. -- Springer, 2002.

[4] B. Barnes and G. R. Fulford. Mathematical Modelling with Case Studies: A differential equation approach using Maple and MATLAB. Second Edition. -- CRC Press, 2008.

[5] Р. А. Прохорова. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие. -- Мн. : БГУ, 2017. http://elib.bsu.by/handle/123456789/205697

[6] В. В. Амелькин. Дифференциальные уравнения : учебное пособие. -- Мн. : БГУ, 2012. http://elib.bsu.by/handle/123456789/43871