Математическое моделирование динамических процессов

Дисциплина для студентов специальности
«Компьютерная математика системный анализ»
механико-математического факультета БГУ

доц. Лаврова О.А., 2020

Цели дисциплины ММДП1

- Формирование практических навыков и умений построения математических моделей реальных объектов с учетом цели исследования, применения математических методов для осуществления анализа построенных моделей, а также формирование навыков, необходимых для успешного применения фундаментальных математических знаний при исследовании задач в областях, непосредственно не связанных с математикой.
- **Образовательная цель**: обучение методам и приемам построения и анализа математических моделей; систематизация и закрепление математических знаний, необходимых при решении прикладных задач; формирование системного подхода к организации процесса решения реальных задач средствами математического моделирования.
- **Развивающая цель**: развитие понимания общности математических подходов и методов для исследования задач из различных областей производства, обслуживания и научных исследований; формирование умений сочетать аналитическое мышление, системное мышление и возможности современных систем компьютерной математики (Mathematica, MATLAB) для качественного и количественного описания и анализа объектов исследования в форме математических моделей.

Введение в математическое моделирование

- Понятия математической модели, математического моделирования
- Классификация математических моделей
- Подходы к построению математических моделей
- Динамическая система как пример математической модели
- Этапы процесса математического моделирования

Модель и моделирование

Модель – материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал (система, процесс, явление), сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

“… all models are wrong, but some are useful” *Box, 1987*

Моделирование – это процесс построения модели и проведении исследований на модели с целью изучить некоторые свойства объекта в определенных условиях.

Моделирование – это общенаучный метод познания окружающего мира.

При моделировании могут применятся практически все остальные методы познания (эмпирические: наблюдение, эксперимент, измерение; теоретические: абстрагирование, идеализация, формализация, индукция, дедукция; общенаучные: анализ, синтез, аналогия)

Математическое моделирование

Математическое моделирование – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на <u>языке математики</u>, а исследование модели проводится с использованием <u>математических методов.</u>

Трусов, 2005

Идеальное М. (vs. материальное)– мыслимая аналогия с объектом оригиналом

Научное М. (vs. интуитивное) – логически обоснованное

Знаковое М. – в качестве моделей используются знаковые изображения, например, математические соотношения

Формальное М. – представление модели с помощью одного или нескольких формальных языков

Достоинства математического моделирования

- **Экономичность** -- сбережение ресурсов для проведения реальных экспериментов (например, в экономике, в экологии)
- **Безопасность** -- Постановка экспериментов и наблюдения за процессом в реальных условиях затруднены/опасны (аварийные ситуации, астрофизические явления)
- **Универсальность** – различные объекты могут описываться одинаковыми математическими моделями
- Возможность моделирования не реализованных в природе объектов
- Возможность контролировать (ускорять, замедлять) время изучаемого процесса

Математическая модель

Математическая модель – оператор $A\colon \Omega_X \to \Omega_Y$, позволяющий по соответствующим значениям входных параметров $X \in \Omega_X$ установить выходные значения параметров $Y \in \Omega_Y$ объекта моделирования

Трусов, 2005

Элементами множеств Ω_X и Ω_Y могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.)

Оператором A может быть функция; отображение в виде системы алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений; алгоритм (функция, для которой не известен явный вид); вероятностное описание; совокупность правил или таблиц, обеспечивающих нахождение выходных параметров по заданным исходным значениям.

Классификация математических моделей I

в зависимости от **сложности объекта моделирования**: простой объект или объект-система.

Для простого объекта моделирования не рассматривается внутреннее строение объекта, не выделяются составляющие его элементы или подпроцессы.

Модели объектов-систем, учитывающие свойства и поведение отдельных элементов, а также взаимосвязи между ними, называются <u>структурными</u>.

Трусов, 2005

Система есть совокупность взаимосвязанных элементов, выделенных из среды и взаимодействующих с окружающей средой как целое для достижения поставленной цели.

Классификация математических моделей II

в зависимости от **определенности параметров модели**: детерминированные и вероятностные.

Параметры детерминированных моделей определены полностью.

В вероятностных моделях отдельные параметры могут задаваться случайными величинами (стохастические модели), оценками случайных величин (случайные модели), функциями принадлежности нечетким множествам (нечетки модели)

Трусов, 2005

Классификация математических моделей III

в зависимости от **целей моделирования**: дескриптивные, оптимизационные, управленческие.

Целью дескриптивных математических моделей является установление закономерностей изменения параметров.

Целью оптимизационных математических моделей является определение оптимальных параметров (оптимального управления) моделируемого объекта с точки зрения некоторого критерия.

Целью управленческих математических моделей является принятие решений в различных областях целенаправленной деятельности человека. Сложность задачи в наличии неопределенностей, вид критерия оптимальности не фиксируется.

Трусов, 2005

Классификация математических моделей IV

в зависимости от **метода реализации**: аналитические и алгоритмические

Аналитический метод реализации позволяет получить выходные параметры в виде аналитических выражений (выражения, в которых используется счетная совокупность арифметических операций, переходов к пределу, элементарные и специальные функции).

- Аналитические методы реализации позволяют с меньшими вычислительными затратами изучить свойства объекта моделирования с помощью математических методов анализа аналитических функций.
- Всплеск интереса к аналитическим методам связан с появлением систем компьютерной математики, которые, в частности, предоставляют возможности символьных вычислений

Алгоритмический метод реализации позволяет получить лишь приближенные значения исходных параметров.

- Вычислительная математика – раздел математики, связанный с разработкой численных методов и построением на их основе вычислительных алгоритмов, которые позволяют находить приближенное решение исходной математической задачи.
- Для получения необходимых результатов необходимо осуществлять экспериментирование с вычислительным алгоритмом, а не решать математическую задачу.

В случае, если математическая задача (хотя бы в упрощенной постановке) допускает аналитическое решение, последнее предпочтительнее численного решения.

Трусов, 2005

Подходы к построению математических моделей

- Модели, получаемые из фундаментальных законов природы
- Модели механических систем, получаемые на основании вариационных принципов
- Модели, получаемые из аналогии с изученными объектами

В случае одинаковых концептуальных постановок задач различные подходы должны приводить к одинаковым математическим моделям!

Различные объекты могут описываться одинаковыми математическими моделями (универсальность математического моделирования)!

Подход 1. Фундаментальные законы природы

- Законы Ньютона
- Закон Гука
- Законы сохранения
  - Закон сохранения массы приводит к уравнению переноса, уравнению диффузии
  - Закон сохранения энергии приводит к уравнению теплопроводности
  - Закон сохранения импульса
- Совместное применение фундаментальных законов приводит, в частности, к математическим моделям газа, жидкости

Подход 2: Вариационные принципы

Построение математических моделей возможно на основе **вариационных принципов**: виртуального перемещения, наименьшего действия, наименьшего принуждения.

Принцип наименьшего действия может быть записан в форме Лагранжа, Якоби или Гамильтона.

Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона: из всех допустимых траекторий движения механической системы между моментами времени t_1 и t_2 выбирается движение, доставляющее минимум функционалу действия

$$S[u] \coloneqq \int_{t_1}^{t_2} L(u(t), u'(t))dt\,,$$

где $L(u, u')$ -- функция Лагранжа для механической системы.

В простейшем случае $L(u, u') = E_{\text{к}} - E_{\text{п}}$ определяется разностью кинетической и потенциальной энергий.

Принцип Гамильтона принимает вид

$$\left.\left(\frac{d}{d\varepsilon} S(u(t) + \varepsilon\varphi(t))\right)\right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

где $\varphi(t)$ – пробная функция такая, что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$.

Подход 3. Аналогия

- В большом числе случаев при построении модели объекта невозможно указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется (объекты в экологии, биологии, экономике).
- Построение моделей может строится на предположении, что «скорость изменения величины пропорциональна значению самой величины (или некоторой функции от нее)». На основании данного предположения построены модели численности популяции в экологии, модели радиоактивного распада, модель распространения нового продукта в экономике
- Предположение в эпидемиологии и экологии: вероятность взаимодействия двух особей пропорциональна произведению их численностей

Примеры ММ

Учебные дисциплины можно рассматривать в качестве сборников готовых моделей изучаемых явлений и рецептов их применения.

Кубланов, 2004

Динамическая система I

Динамическая система первого порядка определяется автономным (правая часть f не зависит явно от времени t) дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \geq t_0.$$

Динамическая система второго порядка определяется системой двух автономных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad t \geq t_0.$$

В частности, к динамическим системам второго порядка относится уравнение второго порядка $\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, которое заменой $\frac{dx}{dt} = y$ приводится к системе двух уравнений первого порядка.

Динамическая система $\boldsymbol{n}$-го порядка определяется системой из n автономных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, t \geq t_0.$$

Динамическая система II

Фазовое пространство (пространство состояний) является геометрическим представлением совокупности всех возможных состояний (фаз) рассматриваемой динамической системы.

Например, для динамической системы 1-го порядка вида $\frac{dx}{dt} = f(x)$ фазовым пространством является одномерное пространство (x).

Для динамической системы 2-го порядка вида $\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$ фазовым пространством является плоскость (x, y).

Фазовой траекторией решения динамической системы $x(t)$называется множество $\bigcup_t x(t)$ в фазовом пространстве $(x_1, \cdots, x_n)$. Другими словами, фазовая траектория решения динамической системы (интегральной кривой) – это проекция этого решения на фазовое пространство.

Фазовый портрет – расположение траекторий в фазовом пространстве.

Динамическая система III

Характер фазовых траекторий позволяет выявить всю совокупность <u>качественных</u> особенностей движения динамической системы без знания решений динамической системы.

Пусть a -- **состояние равновесия (положение равновесия, точка покоя, особая точка)** динамической системы, т. е. $\mathrm{f}(a) \equiv 0$.

Положение равновесия динамической системы является **устойчивым**, если по любой заданной области допустимых отклонений от состояния равновесия (область ε) в фазовом пространстве мы можем указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри $\delta(\varepsilon)$, никогда не достигнет границы области ε.

Динамическая система IV

Устойчивость решений имеет принципиальное значение для решения практических задач. Дело в том, что если сколь угодно малые изменения начальных данных сильно изменяют решение, определяемое выбранными неточными данными, которые обычно являются результатом измерений и, следовательно, неизбежно получены с некоторой погрешностью, то такое решение не имеет никакого прикладного значения и даже приближенно не может описывать изучаемое явление или процесс.

Амелькин, 2012

По этой причине надежный долгосрочный динамический прогноз погоды невозможен и останется невозможным, сколь бы ни совершенствовались компьютеры и регистрирующие начальные условия датчики.

Арнольд

Динамическая система V

Рассмотрим задачу Коши $\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}$

полагая существование и единственность решения при $t \geq t_0$.

Решение задачи Коши $\bar{x}(t)$ называется **устойчивым** (устойчивым по Ляпунову), если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $\mathrm{x}(t)$, удовлетворяющего неравенству $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \overline{\boldsymbol{x}}(t_0)\| < \delta$ следует, что для всех $t \geq t_0$ справедливо $\|\boldsymbol{x}(t) - \overline{\boldsymbol{x}}(t)\| < \varepsilon$.

Если при этом

$$\lim_{t \to +\infty} \|\boldsymbol{x}(t) - \overline{\boldsymbol{x}}(t)\| = 0,$$

то решение называется **асимптотически устойчивым**.

Динамическая система VI

Теорема. Линейная однородная система ОДУ с постоянной вещественной матрицей коэффициентов A

1) устойчива тогда и только тогда, когда среди собственных значений матрицы A нет таких, вещественные части которых положительны, а собственные числа с нулевой вещественной частью либо простые, либо имеют простые элементарные делители.
2) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части.

Частный случай $(\mathrm{n} = 2)$:

узел: устойчивый при $\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0$, неустойчивый при $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$

седло: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ всегда неустойчивое

фокус: $\lambda_{1,2} = \mu + iv, v \neq 0$, устойчивый при $\mu < 0$, неустойчивый при $\mu > 0$

центр: $\lambda_{1,2} = 0 + iv, v \neq 0$ всегда устойчивый

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$: $\lambda_2 < 0$ -- устойчивое ПР, $\lambda_2 > 0$ -- неустойчивое ПР

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$:

Динамическая система VII

Рассмотрим динамическую систему n-го порядка.

Пусть $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ -- линеаризация системы в окрестности положения равновесия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, t \geq t_0,$$

$|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})| \leq M|\boldsymbol{x}|^{1+\alpha}, M > 0, \alpha > 0.$

Если собственные значения матрицы различны и имеют вещественные части, отличные от нуля, то положение равновесия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ нелинейной системы имеет тот же характер, что и положение равновесия системы $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$.

Процесс моделирования (modelling lifecycle)

Этап 1 (обследование) *Подготовка <u>содержательной постановки задачи</u> моделирования в форме вопросов об объекте моделирования, интересующих заказчика. Техническое задание является итоговым документом этапа обследования*

Этап 2 (формулировка) Подготовка <u>концептуальной постановки задачи</u> – это формулировка содержательной постановки задачи в терминах конкретных дисциплин, законов, принципов, предположений относительно свойств и поведения объекта моделирования. Описание объекта моделирования в математической форме на основании концептуальной постановки задачи

Этап 3 (исследование) Исследование (анализ и/или решение) математической задачи, к которой приводит математическая модель. Построение решения и анализ модели зависит от метода реализации (аналитический, алгоритмический)

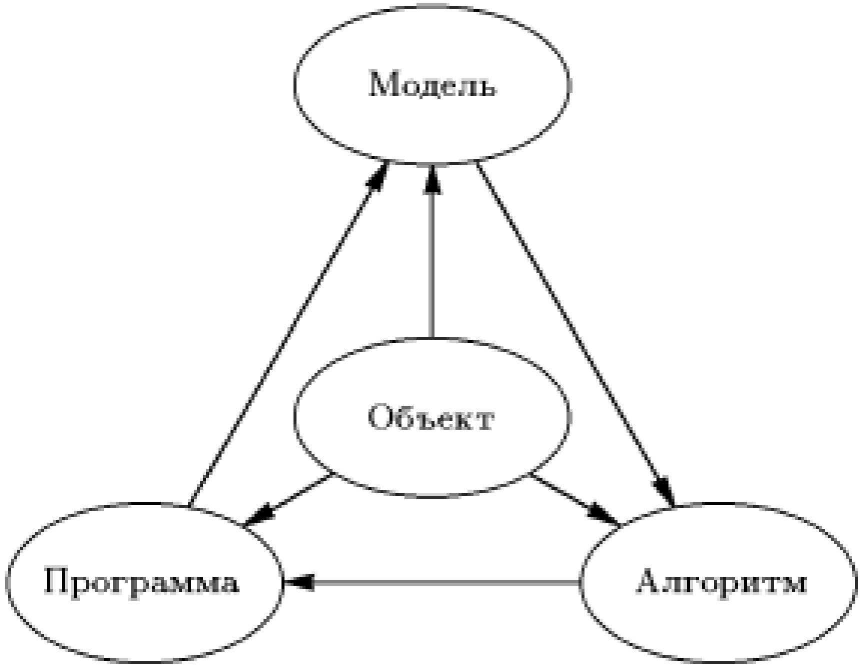
Этап 4 (валидация) Проверка, является ли математическая модель адекватным описанием изучаемого объекта моделирования. Адекватность модели зависит от целей моделирования и принятых критериев.

Этап 5 (интерпретация) Построение выводов по результатам моделирования в терминах соответствующей практической области

Процесс моделирования является итерационным!

Процесс моделирования

Триада «модель-алгоритм-программа»



Самарский, 1997

Этап 4 (валидация модели)

Адекватность математической модели – степень соответствия результатов моделирования данным эксперимента или тестовой задачи

Возможные источники несоответствия на Этапе 2 (формулировка)

- Выбор законов и/или принципов и/или предположений является ошибочным
- Параметры модели определены с недостаточной точностью
- Математическая задача является некорректной

Возможные источники несоответствия на Этапе 3 (исследование)

- Некорректность применения аналитического метода реализации
- В случае алгоритмического метода реализации вычислительный алгоритм не верифицирован