1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

4 Существование единственного решения вариационной задачи

5 Метод Галеркина. Пространство конечных элементов

6 Поэлементное построение дискретной задачи для пространства P_1-элементов

7 Сходимость метода конечных элементов. Априорные оценки ошибки

8 Сходимость метода конечных элементов. Апостериорные оценки ошибки

Метод конечных элементов позволяет найти аппроксимацию точного решения $u \in V$ заданной вариационной задачи в виде решения $u_h \in V_h$ соответствующей дискретной задачи. Для количественной оценки ошибки конечно-элементного решения u_h, построенного на фиксированной сетке T_h, используются апостериорные оценки ошибки, которые вычисляются на основании приближенного решения u_h. Теоретические исследования о построении апостериорных оценок ошибки ведутся с конца 70-ых годов.

Определение 8.1. Исчисляемая величина η, которая аппроксимирует ошибку $||u - u_h||$, вычисленную в некоторой норме (часто в энергетической норме), и которая зависит только от данных задачи, например, $a_{ij}, a_0, f, g, \Omega, \partial\Omega$, и конечно-элементного решения $u_h, \nabla u_h$, называется **апостериорной оценкой ошибки**. Оценка η называется **допустимой** (reliable), если

$$||u - u_h|| \leq C_r \eta.$$

Оценка называется **эффективной** (effective), если

$$\eta \leq C_e ||u - u_h||.$$

Оценка называется **асимптотически точной**, когда она допустима, эффективна и $C_r = C_e$.

Требование эффективности гарантирует то, что допустимая апостериорная оценка ошибки не является завышенной $||u - u_h|| \leq C_r \eta \leq C_r C_e ||u - u_h||$. При этом скорости стремления к нулю оценки ошибки η и самой ошибки будут совпадать. Целью построения апостериорной оценки ошибки является проверка точности численной аппроксимации

$$||u - u_h|| \leq \varepsilon$$

для заданного значения ε. Заданная точность достигается, если для допустимой апостериорной оценки справедливо, что $C_r \eta \leq \varepsilon$. Рассмотрим различные подхода для построения апостериорной оценки ошибки.

1. **Апостериорная оценка остатка** (residual estimate). Данный подход был предложен в 1978 году авторами Babuska и Rheinboldt [5]. Для иилюстрации идеи рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Остаток учитывает значение, полученное подстановкой конечно-элементного решения u_h в дифференциальное уравнение $\Delta u_h + f$. Кроме того, учитывается скачок градиента дискретного решения u_h при переходе через границы элементов. Вводятся понятия **элементного и граничного остатков**

$$r_T(u_h) := (f + \Delta u_h)|_T \quad \text{и} \quad r_E(u_h) := [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}_E]_{\mathbf{n}_E},$$

где $[\cdot]_{\mathbf{n}_E}$ обозначает скачок функции при переходе через сторону E в направлении вектора единичной нормали $\mathbf{n}_E$

$$[\phi]_{\mathbf{n}_E}(x) = \lim_{t \to 0+} (\phi(x + t\mathbf{n}_E) - \phi(x - t\mathbf{n}_E)) \quad \forall x \in E.$$

Локальная оценка ошибки η_T, соответствующая элементу T, оценивается величиной элементного остатка r_T и граничных остатков r_E для всех сторон элемента $E \in \partial T$. Апостерионая оценка вычисляется по значениям локальных оценок на каждом элементе сетки

$$\eta = \left(\sum_{T \in T_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}.$$

2. **Оценка ошибки с помощью восстановления градиента решения**. Основная идея данной оценки состоит в замене градиента от функции u_h вычисляемой реконструкцией $R_h(u_h)$, которая зависит от конечно-элементного решения u_h. Тогда локальная оценка ошибки на элементе определяется в виде

$$\eta_T := ||R_h(u_h) - \nabla u_h||_{0,T}.$$

3. **Иерархическая оценка ошибки или многоуровневая оценка**. Данный подход был предложен в 1989 году авторами Deuflhard, Leinen и Yserentant [9]. Подход основан на двух последовательных приближениях u_h и $u_{h/2}$, построенных на сетке T_h и ее равномерном разбиении $T_{h/2}$, соответственно. Предположим, что

$$||u - u_{h/2}|| \le \rho ||u - u_h||, \quad \text{где } \rho < 1.$$

Тогда имеем, что

$$||u - u_h|| = ||u - u_h \pm u_{h/2}|| \le \rho ||u - u_h|| + ||u_{h/2} - u_h||.$$

Апостериорная оценка ошибки определяется в виде

$$\eta := ||u_{h/2} - u_h||,$$

что приводит в результате к соотношению

$$||u - u_h|| \le \frac{1}{1-\rho} \eta.$$

Часто на практике решение $u_{h/2}$ аппроксимируется, а не определяется непосредственным вычислением на сетке $T_{h/2}$.

4. **Целевая оценка ошибки**. Позднее основная идея оценки некоторой нормы ошибки была заменена на оценку некоторого функционала от ошибки $J(u-u_h)$. При этом в качестве функционала выбирается величина, практическое вычисление которой представляет наибольший интерес. Например, в качестве функционала определяется поток функции u через часть границы области определения $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ или среднее значение функции u по подобласти $\Omega_0 \subset \Omega$

$$J(u-u_h) := \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\partial(u-u_h)}{\partial n} ds \quad \text{или} \quad J(u) := \int\limits_{\Omega_0} (u-u_h) dx.$$

8.1 Апостериорная оценка остатков

Для иллюстрации идеи построения апостериорной оценки остатков рассмотрим однородную задачу Дирихле для уравнения Пуассона в многоугольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$-\Delta u = f \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{1}$$

Конечно-элементная аппроксимация $u_h \in V_h \subset V$ для задачи (1) является приближенным решением вариационной задачи

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in V,$$

где

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Для произвольной функции $v \in V$ имеем

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v) - (\nabla u_h, \nabla v) &= (f, v) - (\nabla u_h, \nabla v), \\ (\nabla (u-u_h), \nabla v) &= (f, v) - (\nabla u_h, \nabla v), \\ (\nabla (u-u_h), \nabla v) &= < R, v > \end{aligned} \tag{2}$$

для функционала остатка $< R, v > := (f, v) - (\nabla u_h, \nabla v)$, определенного для конечно-элементного решения u_h на пространстве V. Уравнение

$$(\nabla e_h, \nabla v) = < R, v > \quad \forall v \in V$$

называется уравнением остатка. Полагаем $v = u - u_h$, тогда

$$|u-u_h|_1^2 = < R, u-u_h > .$$

Целью является построение оценки следующего вида

$$| < R, u-u_h > | \le C\eta ||u-u_h||_1,$$

тогда с помощью неравенства Фридрихса можно показать, что

$$C_1||u-u_h||_1^2 \le |u-u_h|_1^2 \quad \Rightarrow \quad C_1||u-u_h||_1^2 \le C\eta||u-u_h||_1 \quad \Rightarrow \quad ||u-u_h||_1 \le C\eta.$$

Для построения желаемой оценки остатка применим к функционалу остатка формулу интегрирования по частям

$$< R, v > = \sum_{T \in T_h} \int\limits_T (f + \Delta u_h) v dx - \sum_{E \in \partial T, T \in T_h} \int\limits_E (\nabla u_h \cdot \mathbf{n}_E) v ds \quad \forall v \in V.$$

Определим **элементный и граничный остатки**

$$r_T(u_h) := (f + \Delta u_h)|_T \quad \text{и} \quad r_E(u_h) := [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}_E]_{\mathbf{n}_E}.$$

В новых обозначениях имеем

$$< R, v >= \sum_{T \in T_h} \int\limits_T r_T v dx - \sum_E \int\limits_E r_E v ds \quad \forall v \in V. \tag{3}$$

Замечание 8.1. В случае конформных линейных конечных элементов имеем, что $\Delta u_h = 0$, следовательно элементный остаток $r_T(u_h)$ вычисляется а-приори и несет мало информации в локальную ошибку. Появление скачка функции u_h в направлении нормали связано с вложенностью пространства конечных элементов в пространство C^0. В этом случае граничный остаток $r_E(u_h)$ является основным источником для определения величины локальной ошибки.

Замечание 8.2. Скачок $[\cdot]_{\mathbf{n}_E}$ зависит от направления вектора нормали $\mathbf{n}_E$. В случае изменения направления вектора нормали изменяется также скачок для $[\nabla u_h]_{\mathbf{n}_E}$, что оставляет значение для граничного остатка $[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}_E]_{\mathbf{n}_E}$ независимым от направления вектора нормали, т.е.

$$[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}_E]_{\mathbf{n}_E} = \left(\nabla u_h^+ - \nabla u_h^-\right) \cdot \mathbf{n}_E = \left(\nabla u_h^- - \nabla u_h^+\right) \cdot (-\mathbf{n}_E) = [\nabla u_h \cdot (-\mathbf{n}_E)]_{\mathbf{n}_E}.$$

В силу свойства ортогональности метода Галеркина имеем, что $< R, v_h >= 0$ для произвольной функции $v_h \in V_h$. Преобразуем (3)

$$< R, v >=< R, v - v_h >= \sum_{T \in T_h} \int\limits_T r_T (v - v_h) dx - \sum_E \int\limits_E r_E (v - v_h) ds \quad \forall v_h \in V_h.$$

Далее применим неравенство Коши-Шварца

$$| < R, v > | \leq \sum_{T \in T_h} ||r_T||_{0,T} ||v - v_h||_{0,T} + \sum_E ||r_E||_{0,E} ||v - v_h||_{0,E}. \tag{4}$$

Для минимизации построенной оценки сверху необходимо специальным образом аппроксимировать функцию v некоторой функцией $v_h \in V_h$ в пространствах $L_2(T)$ и $L_2(E)$. Одна из возможностей — это использование интерполяции $v_h = I_h v$. Однако, в силу того, что $v \in V \notin C^1(\bar{\Omega})$, возникают проблемы на границах элементов, поэтому аппроксимация должна осуществляться другим способом. Введем следующие обозначения: ω_T — множество всех элементов, имеющих с элементом T общие стороны, ω_E — множество всех элементов, имеющих сторону E, ω_{x_j} — множество всех элементов, содержащих узел x_j. Полагаем, что триангуляция является квази-равномерной, т.е. количество элементов, принадлежащих множествам ω_T, ω_E и ω_{x_j}, равномерно ограничено сверху. Пусть h_T длина наибольшей стороны элемента T, h_E длина стороны E. Доказан следующий результат для квази-интерполяции (интерполяция Клемента) $I_h v \in V_h$ произвольной функции $v \in V$

$$||v - I_h v||_{0,T} \leq C h_T |v|_{1,\omega_T} \quad \text{и} \quad ||v - I_h v||_{0,E} \leq C h_E^{1/2} |v|_{1,\omega_E}.$$

Приведем пример построения интерполяции $I_h v$ для случая линейных конечных элементов. Сначала строится L_2-проекция функции v на ω_{x_j} для каждого узла сетки в виде

$$P_{x_j} v = \frac{1}{|\omega_{x_j}|} \int_{\omega_{x_j}} v dx.$$

Тогда квази-интерполяция задается формулой

$$I_h v(x) := \sum_j (P_{x_j} v) \psi_j(x)$$

для узлового базиса $\{\psi_j(x)\}$ пространства V_h. Применим приведенные оценки для квази-интерполяции к (4)

$$\begin{aligned}
| < R, v > | &= | < R, v - I_h v > | \\
&\leq \sum_{T\in T_h} ||r_T||_{0,T}||v - I_h v||_{0,T} + \sum_E ||r_E||_{0,E}||v - I_h v||_{0,E} \\
&\leq C\left(\sum_T ||r_T||_{0,T} h_T |v|_{1,\omega_T} + \sum_E ||r_E||_{0,E} h_E^{1/2}|v|_{1,\omega_E}\right) \\
&\leq C\left(\left[\sum_T h_T^2||r_T||_{0,T}^2\right]^{1/2}\left[\sum_T |v|_{1,\omega_T}^2\right]^{1/2} + \left[\sum_E h_E||r_E||_{0,E}^2\right]^{1/2}\left[\sum_E |v|_{1,\omega_E}^2\right]^{1/2}\right) \\
&\leq C\left(\left[\sum_T h_T^2||r_T||_{0,T}^2\right]^{1/2} + \left[\sum_E h_E||r_E||_{0,E}^2\right]^{1/2}\right)|v|_1 \\
&\leq C\left(\sum_T h_T^2||r_T||_{0,T}^2 + \sum_E h_E||r_E||_{0,E}^2\right)^{1/2}||v||_1.
\end{aligned}$$

Это приводит нас к окончательному результату

$$||u - u_h||_1 \leq C\eta,$$

$$\eta = \left(\sum_T \eta_T^2\right)^{1/2}, \quad \eta_T^2 = h_T^2||r_T||_{0,T}^2 + \frac{1}{2}\sum_{E\subset T} h_E||r_E||_{0,E}^2. \tag{5}$$

Отметим, что появление множителя $1/2$ перед второй суммой в выражении для η_T связано с тем, что при суммировании по всем элементам каждая внутренняя сторона будет учитываться дважды. Построенная апостериорная оценка ошибки является вычислимой, локальной и допустимой.

Для эффективности построенной оценки остатка необходимо показать, что ошибку можно оценить снизу с помощью величины η. Для доказательства эффективности был разработан специальный подход [15]. Рассмотрим данный подход для оценки элементного остатка r_T в предположении, что правая часть f является константой на каждом элементе T. Введем новую функцию

$$v_T(x) = r_T(x)b_T(x),$$

где $b_T = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ называется функцией пузыря, построенная по барицентрическим координатам треугольника T. Отметим, что функция b_T равна нулю на границе элемента T. Подставим функцию v_T в (2), имеем

$$\begin{aligned}
(\nabla(u - u_h), \nabla v_T) &= < R, v_T > \\
&= \int_T r_T v_T dx \\
&= c||r_T||_{0,T}^2.
\end{aligned}$$

Тогда

$$c||r_T||_{0,T}^2 \leq |u - u_h|_{1,T}|r_T b_T|_{1,T}.$$

После оценки множителя $|r_T b_T|_{1,T}$ получаем желаемый результат

$$h_T||r_T||_{0,T}^2 \leq C|u - u_1|_{1,T}.$$

Аналогичным образом строится оценка для граничного остатка с введением функции пузыря на стороне элемента. Таким образом получаем, что построенная оценка остатка (5) является допустимой и эффективной.

8.2 Адаптация фиксированной сетки (h-адаптация)

Основным применением апостериорных оценок ошибки является адаптивное улучшение сетки на основании апостериорных оценок для улучшения точности конечно-элементного решения в критических областях. В основном величина η вычисляется по формуле

$$\eta = \left(\sum_{T \in T_h} \eta_T^2 \right)^{1/2},$$

где η_T обозначает локальную оценку ошибки, соответствующую элементу T. Величину η_T можно рассматривать как **локальный индикатор ошибки** и в зависимости от величины η_T производить локальное изменение сетки. В частности, измельчать те элементы сетки, которые делают большой вклад в общую оценку η. Такой подход основан на предположениях, что (1) ошибка возникает в тех местах, где индикатор принимает большие значения, что (2) измельчение сетки уменьшит ошибку и что (3) распределение локальной ошибки будет стремиться к равномерному. Указанные предположения корректны для решения краевых задач эллиптического типа, тогда как, в частности, для волновых уравнений и уравнений переноса они являются необоснованными. Рассмотрим итерационный алгоритм адаптивного улучшения сетки:

1. определяем начальную триангуляцию T_{h_0} области Ω;

2. решаем дискретную задачу на триангуляции T_{h_k};

3. вычисляем значения локального индикатора ошибки для всех элементов сетки $\{\eta_T : T \in T_{h_k}\}$, и максимальное значение индикатора на сетке $\eta_k = \max\limits_{T \in T_{h_k}} \eta_T$;

4. если $\eta_k \leq \varepsilon$, то алгоритм заканчивается, в противном случае измельчаем все элементы $T \in T_{h_k}$, для которых $\eta_T \geq \gamma \eta_k$, где параметр $0 < \gamma < 1$. При необходимости измельчаем другие элементы сетки для получения допустимой триангуляции на следующей итерации. Увеличиваем k на 1 и переходим к Шагу 2.

При значениях γ, близких к нулю, алгоритм приведет к изменению многих элементов, при значениях γ, близких к единице, изменится мало элементов. На практике часто полагается $\gamma = 0.5$. Алгоритм может также быть дополнен стратегией огрубления сетки. Такое дополнение является важным для адаптивного решения динамических задач.

Для практической реализации алгоритма адаптивного улучшения сетки необходимо описать подход для измельчения элементов, чтобы гарантировать допустимость построенной триангуляции. При этом необходимо учитывать условие регулярности, чтобы углы треугольных элементов не были слишком маленькими или слишком большими. Введем следующие вспомогательные обозначения:

- треугольник имеет красное разбиение, когда его середины сторон соединяются друг с другом;

- треугольник имеет синее разбиение, когда середина самой длинной стороны соединяется с противолежащим углом и с серединой любой другой стороны;

- треугольник имеет зеленое разбиение, когда середина самой длинной стороны соединяется с противолежащим углом;
- треугольник имеет один или несколько висячих узлов, когда не сам треугольник, а соседние треугольники разбивались.

Красное разбиение порождает подобные треугольники и поэтому не изменяет углы. Требование о разбиении самой длинной стороны в случае синего и зеленого разбиения гарантирует тот факт, что самый маленький угол не будет уменьшаться. Триангуляция является допустимой, когда ни один треугольник не имеет висячих узлов. Четвертый шаг итерационного алгоритма адаптивного улучшения сетки выполняется по следующим правилам для каждого элемента разбиения:

- если $\eta_T \geq \gamma\eta_k$, то к T применяется красное разбиение;
- если T имеет один висячий узел, то к T применяется зеленое разбиение, если узел попадает на длинную сторону, в противном случае – синее разбиение;
- если T имеет два висячих узла, при этом один попадает на длинную сторону, то к T применяется синее разбиение;
- если T имеет два висячих узла, при этом они не попадают на длинную сторону, то к T применяется красное разбиение;
- если T имеет два висячих узла, при этом они не попадают на длинную сторону, то к T применяется красное разбиение;
- если T имеет три висячих узла, то к T применяется красное разбиение.

Сходимость описанного алгоритма адаптивного улучшения сетки была впервые доказана в 1996 году в [10] для многомерного случая, хотя уже многие годы до того адаптивные стратегии успешно использовались на практике. Показано, что алгоритм сходится линейно, т.е. существует константа $0 \leq C < 1$, которая зависит только от данных задачи, что на каждой итерации алгоритма ошибка в H^1-норме уменьшается, по крайней мере, на множитель C.

Пространство конечных элементов называется апостериорно адаптивным, если оно построено с учетом индикатора ошибки.

Задания

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Babuska, I. and Rheinboldt, W.C. (1978): Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18:736–754.

[6] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[7] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[8] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[9] Deuflhard, H., Leinen, P. and Yserentant, H. (1989): Concepts of an adaptive hierarchical finite element code. *IMPACT of Comput. in Sci. and Eng.*, 1:3–35.

[10] Dörfler, W. (1996): A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(3):1106–1124.

[11] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[12] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[13] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[14] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[15] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.