

- 1 Введение
- 2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка
- 3 Пространства Соболева
- 4 Существование единственного решения вариационной задачи
- 5 Метод Галеркина. Пространство конечных элементов
- 6 Поэлементное построение дискретной задачи для пространства P_1 -элементов
- 7 Сходимость метода конечных элементов. Априорные оценки ошибки

7.1 Сходимость. Лемма Сеа

Предположим, что необходимо найти решение $u \in V$ вариационной задачи,

$$a(u, v) = (l, v) \quad \forall v \in V, \quad (1)$$

которая строится для эллиптической краевой задачи 2-го порядка. Полагаем, что задача (1) удовлетворяет предположениям леммы Лакса-Мильграма для ее однозначной разрешимости. Рассмотрим семейство подпространств конечных элементов $V_h \subset V(\Omega)$ гильбертова пространства $V(\Omega)$, где параметр $h > 0$ — максимальный диаметр элементов разбиения области Ω , является определяющим параметром семейства. Для каждого пространства конечных элементов V_h строится дискретное решение $u_h \in V_h$ соответствующей дискретной задачи

$$a(u_h, v_h) = (l, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2)$$

Говорят, что соответствующее семейство дискретных задач вида (2) сходится или имеет место **сходимость**, если для задачи вида (1) имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0,$$

где $\|\cdot\|_V$ обозначает норму в пространстве V .

Априорные оценки ошибки $u - u_h$ метода конечных элементов — это асимптотические утверждения о скорости сходимости ошибки при стремлении параметра h к нулю, построенные на основании свойств решения исходной вариационной задачи $u \in V$. В априорных оценках информация о свойствах дискретного решения $u_h \in V_h$ не используется. В качестве меры ошибки выбирается подходящая норма ошибки $\|u - u_h\|$, например, норма в пространстве $L_2(\Omega)$ или $H^1(\Omega)$ или $L_\infty(\Omega)$. Априорная оценка не оценивает ошибку на фиксированной сетке расчетной области, а показывает, насколько ожидается выигрыш по точности при уменьшении h , что соответствует измельчению сетки.

Метод конечных элементов имеет **порядок сходимости** ℓ или имеет место сходимость $O(h^\ell)$ в некоторой норме, если для малого значения параметра h существует константа C , не зависящая от h , что справедливо

$$\|u - u_h\| \leq Ch^\ell \quad \text{или} \quad \|u - u_h\| = O(h^\ell).$$

Порядок сходимости указывает скорость сходимости по мере измельчения сетки. Отметим, что информация о наилучшем (оптимальном) порядке сходимости ℓ метода конечных элементов часто известна, тогда как количественные оценки константы C имеются только в специальных случаях. Следующие факторы играют важную роль при определении величины порядка сходимости ℓ и константы C в априорной оценке ошибки:

1. свойство гладкости точного решения $u \in H^\alpha$;
2. тип конечных элементов пространств V_h , в частности, степень многочлена k для определения базисных функций конечного элемента;
3. тип элементов разбиения области (например, треугольники или четырехугольники в 2D);
4. норма, в которой оценивается ошибка, например, L_2 -норма или H^1 -норма или L_∞ -норма;
5. квадратурные (кубатурные) формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов в билинейной и линейной формах;
6. способ аппроксимации искривленных границ области Ω .

В дальнейшем полагаем, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является ограниченным многоугольником, разбивается на треугольные элементы, интегралы вычисляются точно. Тогда априорная оценка ошибки зависит от гладкости точного решения $u \in H^\alpha$, степени k полиномиальной аппроксимации метода конечных элементов и нормы, в которой оценивается ошибка.

Следующая теорема Сеа показывает, что задача сходимости сводится к задаче аппроксимации.

Лемма 7.1 (Сеа). Пусть билинейная форма $a : V \times V \rightarrow R$ является непрерывной и эллиптической в V

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V,$$

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Пусть u является решением вариационной задачи:

$$\text{Найти } u \in V, \text{ где } a(u, v) = (l, v) \quad \forall v \in V;$$

u_h является дискретным решением в $V_h \subset V$:

$$\text{Найти } u_h \in V_h, \text{ где } a(u_h, v_h) = (l, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Тогда справедливо

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (3)$$

Доказательство. Так как $v_h \in V_h$ и $V_h \subset V$, следовательно $v_h \in V$ и выполняется

$$a(u, v_h) = (l, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Разность вариационных уравнений для функций $v_h \in V_h$ приводит к соотношению

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4)$$

Полученное соотношение характеризует **ортогональность ошибки** $u - u_h$ метода Галеркина подпространству V_h относительно скалярного произведения, заданного билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим билинейную форму от ошибки

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \leq C \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V. \end{aligned}$$

Последнее соотношение справедливо для произвольной функции $v_h \in V_h$. В силу эллиптичности билинейной формы имеем, что

$$a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|_V^2.$$

Тогда

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h.$$

В силу произвольности выбора v_h полученная оценка справедлива также для минимальной вариации по всем функция пространства V_h

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 7.1. Отметим, что константа C/α определяется вариационной задачей и не зависит от выбора подпространства V_h .

Замечание 7.2. По определению для сходимости метода конечных элементов необходимо выполнение условия

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

Согласно Лемме Сеа **достаточным условие сходимости метода конечных элементов** является существование семейства подпространств (V_h) пространства V такого, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V = 0.$$

Замечание 7.3. Лемма Сеа показывает, что расстояние между решением вариационной задачи u и решением дискретной задачи u_h оценивается минимальным расстоянием между u и всеми элементами из V_h с точностью до множителя C/α . Задача оценивания ошибки $\|u - u_h\|_V$ сводится к задаче теории аппроксимации: вычислить расстояние $d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$ между функцией $u \in V$ и подпространством $V_h \subset V$ или норму разности между решением u и его проекцией на пространство V_h . Встает вопрос о точности аппроксимации заданной функции u функциями из V_h . В общем случае тяжело получить ошибку аппроксимации $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$, поэтому ошибка аппроксимации заменяется ошибкой интерполяции: Пусть $I_h u \in V_h$ интерполянт решения u , тогда

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \|u - I_h u\|_V.$$

7.2 Оценка ошибки интерполяции для треугольного разбиения области

Рассмотрим случай локальной линейной интерполяции заданной функции u на треугольнике T по значениям в вершинах треугольника a_i , $i = \overline{1, 3}$

$$I_T u(\xi) = \sum_{i=1}^3 u(a_i) \lambda_i(\xi) \quad \xi \in T$$

для барицентрических координат $\lambda_i(\xi)$ относительно T .

Лемма 7.2. Для произвольной функции $u \in H^2(T)$ ошибка интерполяции $u - I_T u$ для линейного интерполянта $I_T u$ от u с $I_T u(a_i) = u(a_i)$ на треугольнике T удовлетворяет следующей оценке

$$\|u - I_T u\|_0 \leq C_1 h_T^2 \|u\|_2, \quad \|u - I_T u\|_1 \leq C_2 h_T \|u\|_2$$

с константами C_1 и C_2 , независимыми от диаметра треугольника h_T .

Данная оценка ошибки интерполяции позволяет обобщение на случай интерполяции функции $u \in H^2(\Omega)$ кусочно-линейной функцией, соответствующей разбиению области Ω на треугольники.

Теорема 7.1. Пусть $h = \max_{T \in T_h} h_T$ максимальный диаметр треугольников разбиения T_h . Тогда при условии $u \in H^2(\Omega)$ для ошибки кусочно-линейной интерполяции на области Ω справедливо

$$\|u - I_h u\|_0 \leq C_1 h^2 \|u\|_2, \quad \|u - I_h u\|_1 \leq C_2 h \|u\|_2,$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от h .

Приведем результат обобщения на случай кусочной интерполяции функции u многочленами степени k на области Ω .

Теорема 7.2. Пусть $h = \max_{T \in T_h} h_T$ максимальный диаметр всех треугольников квази-однородной триангуляции. Тогда при условии $u \in H^{k+1}(\Omega)$ для ошибки интерполяции кусочными полиномами степени k имеем

$$\|u - I_h u\|_m \leq C h^{k+1-m} \|u\|_{k+1}, \quad 0 \leq m \leq k+1$$

где константа $C = C(\Omega, k)$.

Вид интерполирующей функции $I_h u$ определяется типом используемой конечноэлементной аппроксимации; при этом предполагается, что все узловые параметры интерполяции определены точно. Разбиение называется квази-однородным, если существует константа σ , что

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \quad \forall T \in T_h,$$

где h_T — диаметр треугольника (максимальное расстояние между двумя точками треугольника), ρ_T диаметр окружности, вписанной в T .

7.3 Априорная оценка ошибки в H^1 -норме

Для случая $u \in V = H^1(\Omega)$ справедлива оценка из Леммы Сеа

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1.$$

Из теоремы 7.2, в частности, следует, что для метода конечных элементов k -го порядка (локальный порядок точности аппроксимации конечными элементами) на треугольной сетке имеем следующую априорную оценку ошибки при $m = 1$

$$\|u - u_h\|_1 \leq \|u - I_h u\|_1 \leq C h^k \|u\|_{k+1}$$

при условии $u \in H^{k+1}(\Omega)$. В частности, ошибка линейного метода конечных элементов на треугольной сетке в норме пространства $H^1(\Omega)$ имеет первый порядок сходимости при условии $u \in H^2(\Omega)$. Построенная априорная оценка справедлива для случая многоугольной области при точном согласовании граничных условий и аналитическом вычислении интегралов.

Замечание 7.4. Следует заметить, что хотя выписанная оценка не является наилучшей, тем не менее обычно можно показать, что она наилучшая по порядку сходимости. Другими словами, оценка не может быть улучшена заменой интерполанта функции u на ее проекцию.

Замечание 7.5. Оценка ошибки принимает вид

$$\|u - u_h\|_1 \leq \|u - I_h u\|_1 \leq C h^k \|u\|_{k+1} + \Delta,$$

где величина добавочного члена Δ определяется типом аппроксимации граничных условий и/или способом аппроксимации криволинейных границ и/или численным интегрированием. Сходимость имеет место, если величина возмущения есть $O(h^s)$, $s > 0$. Измененная возмущением аппроксимация называется оптимальной, если порождаемая возмущением ошибка есть $O(h^k)$, т.е. имеет место тот же порядок малости, что и ошибка интерполяции.

Замечание 7.6. Область применимости построенной оценки ограничена, так как интерполянт решения u определен только в предположении достаточной гладкости решения $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Если решение u не является столь гладким, то показатель степени у h в оценке ошибки уменьшается так, что при $u \in H^{k^*+1}(\Omega)$ и $k^* \leq k$ имеем

$$\|u - u_h\|_1 \leq \|u - I_h u\|_1 \leq Ch^{k^*} \|u\|_{k^*+1}.$$

Если решение u краевой задачи не очень гладкое, то использование многочленов высокой степени не улучшает качество аппроксимации. Интересно, что тот же самый вывод чисто практическим путем был получен инженерами, которые редко используют многочлены степени ≥ 4 для аппроксимации решения краевых задач второго порядка.

7.4 Априорная оценка ошибки в L_2 -норме

Теорема 7.2 об оценке ошибки интерполяции позволяет предположить, что для ошибки линейного метода конечных элементов в L_2 -норме справедлива оценка

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^2 \|u\|_2$$

со вторым порядком сходимости. Для доказательства данного утверждения используется **двойственный прием** или **прием Нитше**.

Для демонстрации двойственного приема рассмотрим частный случай однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в выпуклой области Ω

$$-\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Пусть функция z является решением вспомогательной задачи

$$-\Delta z = u - u_h \quad \text{в } \Omega, \quad z = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Тогда справедливо

$$\|u - u_h\|_0^2 = \int_{\Omega} (u - u_h)^2 dx = - \int_{\Omega} (u - u_h) \Delta z dx.$$

Применим формулу интегрирования по частям

$$\|u - u_h\|_0^2 = \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla z dx - \int_{\partial\Omega} (u - u_h) \frac{\partial z}{\partial n} dx = \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla z dx.$$

Далее воспользуемся свойством ортогональности ошибки метода Галеркина

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Для рассматриваемой задачи имеем, что

$$\int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v_h dx = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Пусть $I_h z$ является линейным интерполянтот функции z по значениям в узлах сетки. Полагаем $v_h = I_h z$ и из выражения для $\|u - u_h\|_0^2$ вычитаем соотношение ортогональности ошибки

$$\|u - u_h\|_0^2 = \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(z - I_h z) dx.$$

Далее неравенство Коши-Шварца приводит к оценке

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq \|u - u_h\|_1 \|z - I_h z\|_1,$$

которая может быть ослаблена переходом к H^1 -норме в правой части

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq \|u - u_h\|_1 \|z - I_h z\|_1.$$

Далее учитывается полученная оценка ошибки в H^1 -норме

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch \|u\|_2,$$

и оценка ошибки интерполяции, согласно Теореме 7.2,

$$\|z - I_h z\|_1 \leq Ch \|z\|_2.$$

В результате имеем, что

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq Ch^2 \|u\|_2 \|z\|_2.$$

Согласно формулировке вспомогательной задачи функция z зависит от ошибки $u - u_h$. В теории эллиптических дифференциальных уравнений известно, что решение однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в выпуклой области принадлежит пространству $H^2(\Omega)$, при этом справедлива оценка

$$\|z\|_2 \leq C \|u - u_h\|_0.$$

Таким образом, получаем оценку ошибки в L_2 -норме в виде

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^2 \|u\|_2.$$

В случае невыпуклых областей или более сложных граничных условий второй порядок сходимости в L_2 -норме не является гарантированным.

Задания

Список литературы

- [1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.
- [2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.
- [3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.
- [4] Шайдулов, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.
- [5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.
- [6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.
- [7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.
- [8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.
- [9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.
- [10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.
- [11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.
- [12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.