1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

4 Существование единственного решения вариационной задачи

5 Метод Галеркина. Пространство конечных элементов

6 Поэлементное построение дискретной задачи для пространства P_1-элементов

Существует два способа построения дискретной задачи: поузловое построение и поэлементное построение. Поузловое построение основано на обходе сетки от узла к узлу и использовании (глобальных) базисных функций пространства конечных элементов V_h. Поузловое построение дискретной задачи применимо только на сетках, когда по индексу узла можно определить все элементы сетки, этот узел содержащие. Поэлементное построение основано на обходе сетки от элемента к элементу и использовании (локальных) базисных функций каждого конечного элемента, построенного на элементе сетки $T \in T_h$. Необходимым условием реализации поэлементного подхода является построение таблицы соответствия «элемент-узлы», где для узлов задается как локальная нумерация на элементе, так и глобальная нумерация во всей расчетной области. В большинстве реализаций метода конечных элементов используется поэлементный подход.

Рассмотрим поэлементное построение дискретной задачи в пространстве P_1-элементов (кусочно-линейная непрерывная аппроксимация на треугольных элементах сетки). Рассмотрим математическую модель в виде неоднородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad x \in \Omega \\ u &= g \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Соответствующая ей вариационная задача, см. подраздел 2.1.2:

Найти $w + g \in H^1(\Omega)$ для $w \in H_0^1(\Omega)$ такую, что

$$a(w,v) =< l, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

где

$$a(w,v) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dxdy, \quad < l, v >= \int_\Omega f v dxdy - a(g,v),$$

функция g рассматривается в виде продолжения с границы области $\partial\Omega$ на всю область Ω.

Применение метода Галеркина к вариационной задаче приводит к дискретной задаче в виде системы линейных алгебраических уравнений, см. предыдущую лекцию. Элементы матрицы системы $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ вычисляются интегрированием по треугольным элементам сетки

$$\begin{aligned} A_{ij} = a(\psi_j, \psi_i) &= \int_\Omega \nabla\psi_j \cdot \nabla\psi_i dxdy = \sum_{T_m \in T_h, a_i, a_j \in T_m} \int_{T_m} \nabla\psi_j \cdot \nabla\psi_i dxdy = \sum_{T_m \in T_h, a_i, a_j \in T_m} A_{ij}^{(m)}, \\ A_{ij}^{(m)} &:= \int_{T_m} \nabla\psi_j \cdot \nabla\psi_i dxdy. \end{aligned}$$

Пусть треугольник T_m имеет вершины a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}, обход против часовой стрелки. Тогда для фиксированного элемента области T_m имеем, что

$$A_{ij}^{(m)} \neq 0 \quad i,j \in \{r_1, r_2, r_3\}, \quad A_{ij}^{(m)} = 0 \quad i,j \notin \{r_1, r_2, r_3\}.$$

Матрица $\tilde{A}^{(m)} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, составленная из ненулевых значений $A_{r_k r_l}^{(m)}$, называется **локальной матрицей системы**

$$\tilde{A}^{(m)} := \begin{pmatrix} A_{r_1r_1}^{(m)} & A_{r_1r_2}^{(m)} & A_{r_1r_3}^{(m)} \\ A_{r_2r_1}^{(m)} & A_{r_2r_2}^{(m)} & A_{r_2r_3}^{(m)} \\ A_{r_3r_1}^{(m)} & A_{r_3r_2}^{(m)} & A_{r_3r_3}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент разбиения T_m делает вклад в вычисление матрицы системы A следующим образом: если мы поставим соответствие между глобальной нумерацией узлов и локальной нумерацией узлов на каждом треугольнике $T_m = \operatorname{conv}(\{a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}\}) = \operatorname{conv}(\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3\})$, тогда

$$A_{r_k r_l}^{new} = A_{r_k r_l}^{old} + \tilde{A}_{kl}^{(m)}, \quad k,l = \overline{1,3}.$$

Имеем, что каждому элементу сетки T_m соответствует изменение девяти элементов матрицы системы A для случая P_1-элементов. Вычислим коэффициент $A_{r_k r_l}^{(m)}$ с использованием локального базиса и перехода к типовому элементу

$$\begin{aligned}
A_{r_k r_l}^{(m)} &= \int_{T_m} \nabla_\xi \psi_{r_l} \cdot \nabla_\xi \psi_{r_k} dxdy \overset{\text{переход к локальной нумерации}}{\rightarrow} = \\
&= \int_{T_m} \nabla_\xi L_l \cdot \nabla_\xi L_k dxdy \overset{\text{переход к типовому элементу:}}{\rightarrow}{}^{F:\hat{T}\to T, F(\hat{\xi}) = B\hat{\xi}+d, dxdy = |\det B| d\hat{x}d\hat{y}} = \\
&= \int_{\hat{T}} \nabla_\xi L_l(F(\hat{\xi})) \cdot \nabla_\xi L_k(F(\hat{\xi})) \left|\det B\right| d\hat{x}d\hat{y} \overset{L_k(F(\hat{\xi})) = \hat{L}_k(\hat{\xi})}{\rightarrow} = \\
&= |\det B| \int_{\hat{T}} \nabla_\xi \hat{L}_l(\hat{\xi}) \cdot \nabla_\xi \hat{L}_k(\hat{\xi}) d\hat{x}d\hat{y} \overset{\nabla_\xi = B^{-T}\nabla_{\hat{\xi}}}{\rightarrow} = \\
&= |\det B| \int_{\hat{T}} \left(B^{-T}\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_l(\hat{\xi})\right) \cdot \left(B^{-T}\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_k(\hat{\xi})\right) d\hat{x}d\hat{y}.
\end{aligned}$$

Так как базисные функции являются линейными на элементе, поэтому градиент от базисной функции является константой на $\hat{T}$ и интеграл вычисляется точно

$$\begin{aligned}
A_{r_i r_j}^{(m)} &= 0.5\left|\det B\right| \left(B^{-T}\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi})\right) \cdot \left(B^{-T}\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi})\right) = \\
&= S(T_m)\left(\left(B^{-1}B^{-T}\right)\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi})\right) \cdot \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi}) = \\
&= \left(C\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi})\right) \cdot \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= S(T_m)\left(B^T B\right)^{-1} = S(T_m)\left(\begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right)^{-1} = S(T_m)\begin{pmatrix} b_1\cdot b_1 & b_1\cdot b_2 \\ b_1\cdot b_2 & b_2\cdot b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \\
&= \frac{S(T_m)}{\det(B)^2}\begin{pmatrix} b_2\cdot b_2 & -b_1\cdot b_2 \\ -b_1\cdot b_2 & b_1\cdot b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4S(T_m)}\begin{pmatrix} b_2\cdot b_2 & -b_1\cdot b_2 \\ -b_1\cdot b_2 & b_1\cdot b_1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_1$. Базисные функции для типового P_1-элемента определены в виде

$\hat{L}_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y}$, $\hat{L}_2 = \hat{x}$, $\hat{L}_3 = \hat{y}$. Тогда локальная матрица системы принимает вид

$$A^{(m)} = \begin{pmatrix} C\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} & C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} & C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \\ C\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ C\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Поэлементный подход используется также для построения правой части системы с учетом задания условия Дирихле

$$\begin{aligned} b_i &= < l, \psi_i >= \int_\Omega f\psi_i dxdy - a(g, \psi_i) = \int_\Omega (f\psi_i - \nabla g \cdot \nabla\psi_i)\, dxdy \\ &= \sum_{T_m \in T_h, a_i \in T_m} \int_{T_m} (f\psi_i - \nabla g \cdot \nabla\psi_i)\, dxdy = \sum_{T_m \in T_h, a_i \in T_m} b_i^{(m)}. \end{aligned}$$

Здесь функция $g(\xi)$ рассматривается в виде продолжения с границы области $\partial\Omega$ на всю область Ω с помощью базисных функций, т.е.

$$g(\xi) = \sum_{j \in Id} g(x_j, y_j)\psi_j(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

где Id обозначает индексы точек границы. Пусть треугольник T_m имеет вершины a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}, обход против часовой стрелки. Вычислим коэффициент $b_{r_k}^{(m)}$ с использованием локального базиса пространства P_1-элементов

$$\begin{aligned} b_{r_k}^{(m)} &= \int_{T_m} (f\psi_{r_k} - \nabla_\xi g \cdot \nabla_\xi \psi_{r_k})\, dxdy \overset{\text{переход к типовому элементу}}{\to} = \\ &= |\det B| \int_{\hat{T}} \hat{f}\hat{L}_k d\hat{x}d\hat{y} - C\sum_{j=1}^{3} g(\xi_j)\nabla_{\hat{\xi}}\hat{L}_j \cdot \nabla_{\hat{\xi}}\hat{L}_k \overset{\text{кубатурная формула для первого слагаемого}}{\to} = \\ &\approx \frac{S(T_m)}{3} f(\hat{a}_k) - C\sum_{j=1}^{3} g(\hat{a}_j)\nabla_{\hat{\xi}}\hat{L}_j \cdot \nabla_{\hat{\xi}}\hat{L}_k. \end{aligned}$$

Локальный вектор правой части для P_1-элемента $\tilde{b}^{(m)} \in \mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\tilde{b}^{(m)} := \begin{pmatrix} b_{r_1}^{(m)} \\ b_{r_2}^{(m)} \\ b_{r_3}^{(m)} \end{pmatrix} = \frac{S(T_m)}{3} \begin{pmatrix} f(a_{r_1}) \\ f(a_{r_2}) \\ f(a_{r_3}) \end{pmatrix} - \tilde{A}^{(m)} \begin{pmatrix} g(a_{r_1}) \\ g(a_{r_2}) \\ g(a_{r_3}) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Аналогично построению матрицы системы имеем, что каждый элемент сетки T_m делает вклад в вычисление правой части системы b следующим образом: если мы поставим соответствие между глобальной нумерацией узлов и локальной нумерацией узлов на каждом треугольнике $T_m = \operatorname{conv}(\{a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}\}) = \operatorname{conv}(\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3\})$, тогда

$$b_{r_k}^{new} = b_{r_k}^{old} + \tilde{b}_k^{(m)}, \quad k = \overline{1,3}. \tag{3}$$

6.1 Реализация условия Дирихле на основе глобального базиса

Условие Дирихле $u = g$ на границе области приводит к появлению второго слагаемого в выражении для линейного функионала правой части

$$< l, v >= \int_\Omega f v dx dy - a(g, v).$$

Часто на практике учет условия Дирихле в выражении для функционала $< l, v >$ осуществляется на основе глобальной нумерации базисных функций без перехода к локальной матрице системы на каждом элементе области, как это сделано в формуле (2). В этом случае сначала правая часть системы строится по формуле (3) для локального вектора правой части (2) при $g = 0$. Корректировка i-го элемента правой части $a(g, \psi_i)$ может быть представлена в следующем виде

$$a(g, \psi_i) = \sum_{j \in Id} g(x_j, y_j) a(\psi_j, \psi_i) = \sum_{j \in Id} g(x_j, y_j) A_{ij} \quad i = \overline{1, N}$$

для

$$g(\xi) = \sum_{j \in Id} g(x_j, y_j) \psi_j(\xi), \quad \xi \in \Omega.$$

В этом случае правая часть корректируется для каждого индекса, соответствующего границе с условием Дирихле,

$$b^{new} = b^{old} - g(x_j, y_j) A(:, j), \quad j \in Id. \tag{4}$$

При этом для точек, соответствующих границе с условием Дирихле, уравнения заменяются на следующие

$$u_j = g(x_j, y_j), \quad j \in Id.$$

Возможны два способа реализации условия Дирихле по формуле (4):

Способ 1:

$$\begin{aligned}
& && \%\ \text{изменение правой части} \\
b &=& & b - A(:, j) * g(x(j), y(j)); \\
b(j) &=& & g(x(j), y(j)); \\
& && \%\ \text{замена } j\text{-ой строки на единичную} \\
A(j, :) &=& & \mathrm{sparse}(1, j, 1, 1, N); \\
& && \%\ \text{замена } j\text{-ого столбца на единичный} \\
A(:, j) &=& & \mathrm{sparse}(j, 1, 1, N, 1).
\end{aligned}$$

Способ 2:

$$\begin{aligned}
& && \%\ \text{определение граничных и внутренних узлов} \\
\mathrm{BoundaryNode} &=& & \mathrm{unique}(e(1, :), e(2, :)); \\
\mathrm{InteriorNode} &=& & \mathrm{setdiff}([1 : N], \mathrm{BoundaryNode}); \\
& && \%\ \text{изменение правой части} \\
b &=& & b(\mathrm{InteriorNode}) - A(\mathrm{InteriorNode}, \mathrm{BoundaryNode}) * g; \\
& && \%\ \text{изменение матрицы системы} \\
A &=& & A(\mathrm{InteriorNode}, \mathrm{InteriorNode}); \\
& && \%\ \text{построение вектора решения} \\
u_h &=& & \mathrm{zeros}(N, 1); \\
u_h(\mathrm{BoundaryNode}) &=& & g; \\
u_h(\mathrm{InteriorNode}) &=& & A \backslash b;
\end{aligned}$$

6.2 Реализация граничных условий для смешанной задачи

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad x \in \Omega \\ u &= g_D \quad x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_N \quad x \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

где $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\mathrm{measure}(\Gamma_D) > 0$. Соответствующая вариационная задача (см. подраздел 2.1.4):

Найти $w + g_D \in H^1(\Omega)$ для $w \in H_0^1(\Omega)$ такую, что

$$a(w, v) =< l, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

где

$$a(w, v) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dxdy, \quad < l, v >= \int_\Omega f v dxdy - a(g_D, v) + \int_{\Gamma_N} g_N v ds.$$

Здесь функция g_D рассматривается в виде продолжения с границы области Γ_D на всю область Ω с помощью базисных функций, т.е.

$$g = \sum_{j \in Id_D} g(x_j, y_j)\psi_j,$$

где Id_D обозначает индексы точек на границе Γ_D. Линейный функционал $< l, v >$ учитывает условие Дирихле на границе Γ_D во втором слагаемом и условие Неймана на границе Γ_N в третьем слагаемом. На практике сначала корректируется система линейных уравнений для учета условия Дирихле на границе Γ_D, см. предыдущий подраздел. Корректирующее слагаемое для учета условия Неймана в i-ом элементе правой части $\int_{\Gamma_N} g_N \psi_i ds$ может быть вычислено с применением квадратурной формулы средних для случая поточечного задания функции g_N в узлах сетки. Рассмотрим пример, когда Γ_N является верхней границей единичного квадрата $(0, 1) \times (0, 1)$. Тогда для внутренних точек границы имеем

$$\int_{\Gamma_N} g_N \psi_i ds \approx \frac{1}{2} g_N(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_{i-1}).$$

Предположим, что $g_N = x + 1$.

$$\begin{aligned} &I_{top} = find(p(2, :) == 1); \\ &[px_{top}, ind] = sort(p(1, I_{top})); \\ &I_{top} = I_{top}(ind); \\ &g_{N,top} = px_{top} + 1; \end{aligned}$$

Скорректируем правую часть для верхней границы области с учетом условия Неймана

$$
\begin{aligned}
&for \quad i = 1 : length(I_{top})\\
&\quad ind = I_{top}(i);\\
&\quad if(i == 1)\\
&\qquad b(ind) = b(ind) + 0.5 * g_{N,top}(i) * (px_{top}(i+1) - px_{top}(i));\\
&\quad elseif(i == length(I_{top}))\\
&\qquad b(ind) = b(ind) + 0.5 * g_{N,top}(i) * (px_{top}(i) - px_{top}(i-1));\\
&\quad else\\
&\qquad b(ind) = b(ind) + 0.5 * g_{N,top}(i) * (px_{top}(i+1) - px_{top}(i-1));\\
&\quad end;\\
&end
\end{aligned}
$$

Отметим, что при условии стыковки в концевых точках границы условия Дирихле и условия Неймана, реализуется условие Дирихле. Это приводит к упрощению реализации

$$
\begin{aligned}
&for \quad i = 2 : length(I_{top}) - 1\\
&\quad ind = I_{top}(i);\\
&\quad b(ind) = b(ind) + 0.5 * g_{N,top}(i) * (px_{top}(i+1) - px_{top}(i-1));\\
&end
\end{aligned}
$$

6.3 Реализация задачи Неймана для уравнения Пуассона

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Пуассона

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f, \quad x \in \Omega\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= g_N, \quad x \in \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Решение задачи Неймана определяется с точностью до константы. Для построения обощенного решения задачи из функционального пространства нужно исключить постоянные функции

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \,:\, \int_\Omega v dx = 0\}.$$

Это означает, что решение вариационной задачи должно дополнительно удовлетворять интегральному соотношению $\int_\Omega u dx = 0$ для неизвестной функции $u \in V$. Это реализуется с помощью метода множителей Лагранжа, который позволяет учитывать ограничения для неизвестного решения u за счет введения дополнительной неизвестной величины λ — множителя Лагранжа.

Найти $u \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, что

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \lambda \int_\Omega v dx &= \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g_N v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega),\\
\int_\Omega u dx &= 0.
\end{aligned}
$$

Соответствующая дискретная задача будет иметь следующий вид

$$\begin{pmatrix} A & \Lambda^T \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

где вектор Λ определяется координатами $\Lambda_j = \int_\Omega \psi_j dx$.

Задания

Задание 6.1 (практика)**.** Реализуйте алгоритма метода конечных элементов в пространстве P_1-элементов для задачи Дирихле из Задания 1.5. Сравните конечно-элементное решение с точным решением.

1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y) \in \Omega = (0,1)^2 \\ u = g, & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

   Аналогично реализации Задания 1.5, решите задачу средствами GUI PDEToolbox для заданного точного решения $u(x,y)$ из Задания 1.2. Экспортируйте в Workspace геометрию сетки (p,e,t) и конечно-элементное решение u_{PDE}.

2. Дискретная задача является системой линейной алгебраических уравнений для матрицы системы A и правой части b. Некоторые комментарии для построения матрицы A и вектора правой части b:

   (a) Размер матрицы A и правой части b определяется количеством базисных функций. В случае P_1-элементов количество базисных функций совпадает с количеством узлов сетки.

$$\begin{aligned} &N_p = size(p,2);\\ &A = sparse(N_p, N_p);\\ &b = sparse(N_p, 1); \end{aligned}$$

   (b) Для построения правой части необходимо вычислить функцию f в каждом узле сетки. Например, для $f = x + y$ имеем

$$\begin{aligned} &x = p(1,:);\\ &y = p(2,:);\\ &f = x + y; \end{aligned}$$

   (c) Полагаем сначала, что функция g на границе области равна 0.

   (d) Пусть Am и bm обозначают локальную матрицу системы и локальную правую часть, соответственно. Для случая P_1-элементов имеем следующую размерность

$$\begin{aligned} &Am = zeros(3,3);\\ &bm = zeros(3,1); \end{aligned}$$

   (e) На каждом треугольном элементе локальная матрица системы Am и локальная правая часть bm вычисляются по формулам (1) и (2), соответственно.

$$\begin{aligned} &for \quad i = 1 : size(t,2)\\ &\quad Am = ...\\ &\quad bm = ...\\ &end \end{aligned}$$

(f) Каждая локальная матрица системы Am и локальная правая часть bm делает вклад в вычисление матрицы системы A и правой части b

$$\begin{aligned}
&for \quad i = 1 : size(t, 2)\\
&\quad Am = ...\\
&\quad bm = ...\\
&\quad ind = t(1 : 3, i);\\
&\quad A(ind, ind) = A(ind, ind) + Am;\\
&\quad b(ind) = b(ind) + bm;\\
&end
\end{aligned}$$

(g) Предположим, что функция g на левой границе равна y, на правой — $y+1$, на верхней — $x+1$, на нижней — x. Тогда функция g на границе области может быть определена следующим образом:

$$\begin{aligned}
&Id_{left} = find(p(1, :) == 0);\\
&Id_{right} = find(p(1, :) == 1);\\
&Id_{top} = find(p(2, :) == 1);\\
&Id_{bottom} = find(p(2, :) == 0);\\
&Id = [Id_{left}, Id_{right}, Id_{top}, Id_{bottom}];\\
&g(Id) = [p(2, Id_{left}), p(2, Id_{right}) + 1, p(1, Id_{top}) + 1, p(1, Id_{bottom})];
\end{aligned}$$

(h) Осуществите корректировку системы A и правой части b с учетом функции g, используя Способ 1 или Способ 2, см. подраздел 6.2,

3. Решите дискретную задачу
$$u_h = A\backslash b;$$

4. Сравните графически решение u_h с точным решением u и решением u_{PDE}, полученным с помощью PDEToolbox.

Задание 6.2 (практика). Реализуйте алгоритма метода конечных элементов в пространстве P_1-элементов для смешанной краевой задачи, построенной для уравнения Пуассона в единичном квадрате. Сравните конечно-элементное решение с точным решением.

Задание 6.3 (практика). Реализуйте алгоритма метода конечных элементов в пространстве P_1-элементов для задачи Неймана, построенной для уравнения Пуассона в единичном квадрате. Для однозначной разрешимости необходимо ввести интегральное соотношение в вариационную формулировку задачи. Сравните конечно-элементное решение с точным решением.

Задание 6.4 (дополнительное задание). Постройте для P_2-элемента локальную матрицу системы $\tilde{A}^{(m)} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ и локальный вектор правой части $\tilde{b}^{(m)} \in \mathbb{R}^6$.

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.