1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

4 Существование единственного решения вариационной задачи

5 Метод Галеркина. Пространство конечных элементов

Идея численного решения краевой задачи методом конечных элементов заключается в решении соответствующей вариационной задачи, сформулированной в пространстве Соболева V, в подходящем конечномерном подпространстве $V_h \subset V$. Выбор подпространства V_h осуществляется таким образом, чтобы при стремлении параметра дискретизации h к нулю, численное решение $u_h \in V_h$ стремилось к обобщенному решению краевой задачи: $u_h \to u \in V$ при $h \to 0$.

Метод нахождения приближенного решения вариационной задачи за счет перехода от бесконечномерного пространства V к конечномерному подпространству V_h называется **методом Галеркина**:

Найти $u_h \in V_h$ такую, что

$$a(u_h, v) =< l, v > \quad \forall v \in V_h. \tag{1}$$

Вариационная задача (1), сформулированная в конечномерном пространстве, называется **дискретной задачей,** а решение u_h называется **дискретным решением**.

Процесс решения исходной задачи методом конечных элементов может быть представлен в виде последовательности преобразований, приводящей к приближенному решению исходной задачи: Исходная задача (описание реальной системы) $\to$ Математическая модель в виде краевой задачи $\to$ Вариационная задача $\to$ Дискретная задача.

При условии, что пространство V_h является линейным, билинейная форма $a(u, v)$ симметричной и положительной, а функционал $< l, v >$ линейным, вариационная задача эквивалентна решению задачи минимизации (см. Теорема 2.2):

$$\min \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - < l, v > : \ v \in V_h \right\}.$$

Переход от бесконечномерного пространства V к конечномерному подпространству V_h при решении задачи минимизации называется **методом Ритца** (1908).

Теорема 5.1 (аналог леммы Лакса-Мильграма для дискретной задачи)**.** *Если билинейная форма $a(u, v)$ является эллиптической и непрерывной, а линейная форма $< l, v >$ непрерывной, то дискретная задача (1), сформулированная в гильбертовом подпространстве $V_h \subset V$, имеет единственное решение.*

Пусть задано n линейно независимых функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$ в линейном бесконечномерном пространстве V. С помощью функций ψ_j можно построить n-мерное подпространство V_h пространства V как множество всех линейных комбинаций функций ψ_j

$$V_h = \left\{ \sum_{j=1}^{n} z_j \psi_j \ : \ \psi_j \in V — \text{ линейно-независимые}, j = \overline{1, n}, \quad z_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

Функции ψ_j называются **базисными функциями** в n-мерном пространстве V_h (или глобальными функциями формы).

Вариационные уравнения дискретной задачи (1) справедливы для всех функций $v_h \in V_h$. В силу линейности уравнений их достаточно удовлетворить только для базисных функций

$$a(u_h, \psi_i) =< l, \psi_i > \quad i = \overline{1, n}.$$

Представим неизвестную функцию u_h в виде разложения по заданному базису с неизвестными коэффициентами разложения $z_j \in \mathbb{R}$

$$u_h = \sum_{j=1}^{n} z_j \psi_j.$$

Тогда вариационные уравнения переформулируются в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)для неизвестных числовых коэффициентов z_j

$$\sum_{j=1}^{n} a(\psi_j, \psi_i) z_j =< l, \psi_i > \quad i = \overline{1, n}.$$

Это позволяет сформулировать дискретную задачу (1) в матричном виде

$$Az = b,$$

где $A_{ij} = a(\psi_j, \psi_i)$, $b_i =< l, \psi_i >$, $i, j = \overline{1, n}$. Имеем систему из n уравнений с n неизвестными z_j. Покажем, что матрица A является положительно-определенной, если соответствующая билиненая форма задачи является эллиптической

$$\begin{aligned} z'Az &= \sum_{i,j=1}^{n} z_i A_{ij} z_j = \sum_{i,j=1}^{n} z_i a(\psi_j, \psi_i) z_j = \sum_{i,j=1}^{n} a(z_j \psi_j, z_i \psi_i) \\ &= a\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \psi_j, \sum_{i=1}^{n} z_i \psi_i\right) = a(u_h, u_h) \geq \alpha ||u_h||^2 > 0. \end{aligned}$$

Из положительной определенности матрицы A следует ее обратимость. Решение дискретной задачи единственно в случае эллиптичности билинейной формы. Процесс решения дискретной задачи означает:

- на основе базисных функций ψ_j пространства V_h вычислить величины A_{ij} и b_i,
- найти z_j как решение системы линейных алгебраических уравнений $Az = b$,
- построить приближенное решение $u_h \in V_h$ в виде $u_h = \sum_{j=1}^{n} z_j \psi_j$.

Идея метода конечных элементов связана со специальным процессом выбора базисных функций. А именно, для построения метода конечных элементов в качестве базисных функций используются **финитные функции**. Финитная функция ψ_j отлична от нуля в некоторой компактной подобласти supp ψ_j (носитель функции) области Ω и равна нулю на оставшейся части области Ω. Выбор финитных функций в качестве базисных является решающим для эффективности практической реализации метода конечных элементов. В этом случае матрица A является **разреженной** — матрица с малым числом ненулевых элементов (отношение числа ненулевых элементов матрицы к общему числу элементов меньше 5 %). Действительно,

$$\begin{aligned} A_{ij} &= a(\psi_j, \psi_i) = \int_\Omega \sum_{l,k} a_{lk} \partial_l \psi_j \partial_k \psi_i = \sum_{l,k} \int_\Omega a_{lk} \partial_l \psi_j \partial_k \psi_i \\ &= \sum_{l,k} \int\limits_{\text{supp } \psi_i \cap \text{supp } \psi_j} a_{lk} \partial_l \psi_j \partial_k \psi_i = \sum_{l,k} \int\limits_{\bigcup_{\xi_i, \xi_j \in K} K} a_{lk} \partial_l \psi_j \partial_k \psi_i. \end{aligned}$$

С вычислительной точки зрения процесс решения СЛАУ для разреженных матриц является очень эффективным.

5.1 Пространство конечных элементов

Метод конечных элементов в его простейшей форме, это метод Галеркина, характеризуемый следующими тремя основными аспектами в построении подпространства V_h — пространства конечных элементов.

1. Разбиение области Ω на конечное число подобластей, которые называются элементами. Множество всех элементов обозначается T_h. При этом разбиение области должно быть допустимым. Это означает, что должны выполняться следующие свойства

   (a) $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M} T_i$, где T_i — треугольник или четырехугольник (2D); тетраэдр или призма (3D);

   (b) Если $T_i \cap T_j$ — точка, тогда точка является вершиной T_i и T_j;

   (c) Если $T_i \cap T_j, i \neq j$ — множество точек, тогда $T_i \cap T_j$ — сторона (ребро) или грань T_i и T_j.

2. Определение носителя базисной функции ψ_j в виде объединения элементов, содержащих точку ξ_j
$$\text{supp } \psi_j = \bigcup_{T \in T_h, \xi_j \in T} T.$$
   Количество точек для построения базисных функций определяет размерность матрицы дискретной задачи.

3. Определение базисной функции в виде многочлена. В частности, на каждом элементе функция $u \in V_h$ является многочленом степени, меньшей либо равной n, если T — треугольник
$$u|_T \in P_n := \{p(x,y) = \sum_{0 \geq i+k \leq n} c_{ik} x^i y^k\}$$
   или степени, меньшей либо равной n, по каждой переменной, если T — четырехугольник
$$u|_T \in Q_n := \{q(x,y) = \sum_{0 \leq i,k \leq n} c_{ik} x^i y^k\}.$$

При условии $V_h \subset V = H^m(\Omega)$ пространство конечных элементов обладает свойством
$$V_h \subset C^{m-1}(\bar{\Omega}).$$

Пространство конечных элементов, состоящее из непрерывных функций $C^0(\bar{\Omega})$, необходимо для решения эллиптической краевой задачи второго порядка, тогда как для решения задач четвертого порядка необходимо использовать C^1-пространство конечных элементов. При условии $V_h \subset V$ пространство конечных элементов называется конформным и метод конечных элементов называется конформным. В противном случае пространство конечных элементов называется неконформным.

Распространенным пространством конечных элементов является пространство линейных треугольных элементов из $C^0(\bar{\Omega})$ (пространство Куранта, пространство P_1-элементов)
$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \, : \, v|_T \in P_1(T), \forall T \in T_h\}.$$

По определению произвольная функция пространства V_h является линейной на каждом элементе и кусочно-непрерывной во всей области. В частности, базисные функции пространства V_h можно определить по соотношениям

$$\psi_j(\xi_i) = \delta_{ji}.$$

В этом случае коэффициенты z_j разложения дискретного решения u_h по базису принимают конкретный смысл $z_j = u_h(\xi_j)$.

Другие примеры пространств конечных элементов:

- пространство квадратичных треугольных элементов из $C^0(\Omega)$ или P_2-элементов,
- пространство кубических треугольных элементов из $C^0(\Omega)$ или P_3-элементов,
- пространство треугольных элементов Аргириса из $C^1(\Omega)$, $u|_T \in P_5$,
- пространство треугольных элементов Белла из $C^1(\Omega)$, $u|_T \in P_5$,
- пространство билинейных прямоугольных элементов из $C^0(\Omega)$ или Q_1-элементов, и т.д.

На практике определение базисных функций осуществляется на основе понятия конечного элемента.

5.2 Конечный элемент

Определение 5.1 (Сьярле, 1978). **Конечный элемент** определяется тройкой (T, Π, Σ), где

T — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^d$ с непустым множеством внутренних точек и непрерывной по Липшицу границей;

Π — конечномерное пространство действительнозначных функций размерности s, определенных на множестве T, такое, что $\Pi \subset C(T)$;

Σ — множество s линейно независимых линейных функционалов l_i, определенных на пространстве Π, таких, что каждая функция $p \in \Pi$ однозначным образом определяется значениями функционалов из Σ (свойство Π-унисольвентности). Другими словами, в пространстве Π можно определить базисные функции $L_i(\xi)$, что

$$\forall p \in \Pi \quad p(\xi) = \sum_{i=1}^{s} l_i(p) L_i(\xi), \quad l_i \in \Sigma, \quad \xi \in T.$$

Линейные функционалы $l_i \in \Sigma$, $i = \overline{1, s}$ называют **степенями свободы конечного элемента**. Базисные функции $L_i \in \Pi$, $i = \overline{1, s}$ называются **функциями формы конечного элемента**.

Если множество T является d-симплексом (выпуклая оболочка $d+1$ точек, не принадлежащих гиперплоскости), то конечный элемент называется симплициальным (или треугольным при $d = 2$ и тетраэдальным при $d = 3$).

Если множество степеней свободы Σ определяется значениями в точках, принадлежащих T, т.е. $l_i(p) = p(\xi_i)$, $\xi_i \in T$, тогда конечный элемент называется **лагранжевым конечным элеменом**, а точки . Лагранжевы конечные элементы используются для аппроксимации пространства $H^1(\Omega)$. Другими возможностями задания степеней свободы являются задание значений производных в точках элемента T или значений интегралов по T. Если в качестве одной из степеней свободы используется значение производной, то конечный элемент называется **эрмитовым конечным элементом**. Примером является элемент Аргириса, который используется для аппроксимации пространства $H^2(\Omega)$.

Пространство конечных элементов определяется разбиением области на элементы T_h и заданием конечного элемента (T, Π, Σ) одного и того же типа для всех элементов разбиения

$$V_h = \{v : \Omega \to \mathbb{R}, : \quad v|_T \in \Pi(T), \quad \forall T \in T_h\}.$$

Базисные функции $\{\psi_i\}$ $i = \overline{1, m}$ пространства конечных элементов V_h строятся по функциям формы для каждого элемента $T \in T_h$. Пусть степень свободы l_a соответствует узлу a. Пусть I_a обозначает индексы элементов области, для которых a является узлом. Пусть L_i^a для каждого $i \in I_a$ обозначает функцию формы на элементе T_i, соответствующую степени свободы l_a. Тогда базисная функция $\psi_a \in V_h$, соответствующая степени свободы l_a, определяется соотношениями

$$\psi_a(\xi) = \begin{cases} L_i^a(\xi), & \text{где } \xi \in T_i, i \in I_a \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим несколько примеров задания конечных элементов.

Пример 5.1. В $\mathbb{R}^1$ элементом области является отрезок. Пусть $T = [0, 1], \Pi = P_1(T)$ пространство линейных функций на отрезке с размерностью $s = 2$. Определим $\Sigma = \{l_1, l_2\}$ значениями функций $p \in \Pi$ на концах отрезка, т.е. $l_1(p) = p(0)$ и $l_2(p) = p(1)$. Тогда функции формы пространства Π определяются однозначно, как $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = x$. В общем случае, когда $T = [a, b]$, $\Pi = P_n(T)$ — пространство полиномов степени $\leq n$ с размерностью пространства $s = n + 1$, тогда множество степеней свободы $\Sigma = \{l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}\}$ можно задать как $l_i(p) = p(a + (b - a)(i - 1)/(n + 1))$, $i = \overline{1, n + 1}$.

Пример 5.2. Рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$, элементом области полагаем треугольник T. Пусть $\Pi = P_1(T) = \text{span}\{1, x, y\}$ пространство линейных функций на треугольнике с размерностью $s = 3$, Σ определяется значениями функций $p \in \Pi$ в s точках, принадлежащих треугольнику $\Sigma = \{p(a_i) : a_i \in T, i = \overline{1, s}\}$. Различный выбор точек a_i приводит к различным типам конечных элементов. В частности,

- Если степенями свободы являются значения в вершинах треугольника (**элемент Куранта**), тогда функция $p \in \Pi$ на стороне треугольника T, общей с треугольником $\tilde{T}$, однозначно определяется значениями на концах стороны и совпадает вдоль этой стороны с функцией $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}$, определенной на треугольнике $\tilde{T}$. Таким образом, пространство P_1-элементов будет состоять из непрерывных функций, т.е. $V_h \subset C^0(\Omega)$. Пространство P_1-элементов является конформным, схематическое изображение P_1-элемента представлено на Рис. 1 (Lineares Dreieckelement).

- Если степенями свободы являются значения в серединах сторон треугольника (**элемент Крузее-Равьяра**), тогда функция $p \in \Pi$ на стороне треугольника T, общей с треугольником $\tilde{T}$, неоднозначно определяется значением в средней точке и совпадает с функцией $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}$, определенной на треугольнике $\tilde{T}$, только в средней точке. Таким образом, пространство элементов Крузее-Равьяра будет состоять из разрывных функций. Пространство элементов Крузее-Равьяра является неконформным.

Пример 5.3. Рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$, элементом области полагаем треугольник T. $\Pi = P_2(T) = \text{span}\{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$ пространство квадратичных функций на треугольнике с размерностью $s = 6$, Σ определяется значениями функций из Π в s точках, принадлежащих треугольнику. Если степенями свободы являются значения в вершинах треугольника и в серединах сторон, тогда функция $p \in \Pi$ на стороне треугольника T, общей с треугольником $\tilde{T}$, однозначно определяется значениями на концах стороны и в ее средней точке и совпадает вдоль этой стороны с функцией $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}$, определенной на треугольнике $\tilde{T}$. Таким образом, пространство P_2-элементов будет состоять из непрерывных функций $V_h \subset C^0(\Omega)$ и будет являться конформным. Схематическое изображение P_2-элемента представлено на Рис. 1 (Quadratisches Dreieckelement).

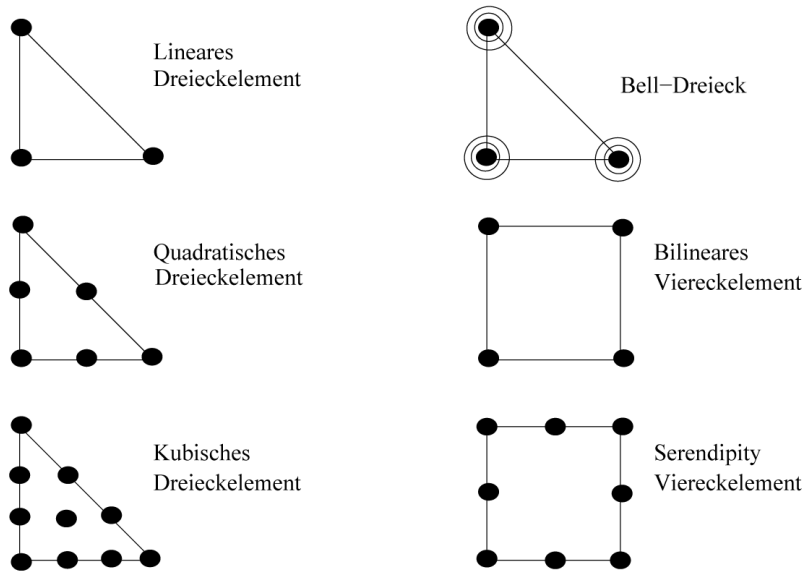

Рис. 1: Примеры конечных элементов.

5.2.1 Построение функций формы для линейного треугольного конечного элемента

Рассмотрим P_1-элемент на треугольнике T с вершинами $a_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1,3}$. Полагаем обход вершин треугольника против часовой стрелки. Многочлены первой степени на треугольнике однозначно определяются значениями функций в вершинах $\Sigma = \{p(a_i),\ i = \overline{1,3}\}$. Действительно, произвольную функцию пространства $p \in P_1(T)$ можно разложить по базису $L_i(x, y)$ в следующем виде

$$\forall p \in \Pi \quad p(x, y) = p(a_1)L_1(x, y) + p(a_2)L_2(x, y) + p(a_3)L_3(x, y).$$

Возьмем в качестве функций $p(x, y)$ базисные функции $\{x, y, 1\}$ пространства $P_1(\mathbb{R}^2)$ и построим с их помощью функции формы на треугольнике T. Получим систему уравнений для определения функций формы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(x, y) \\ L_2(x, y) \\ L_3(x, y) \end{pmatrix}.$$

Применяя правило Крамера для произвольной точки $\xi = (x, y)$ имеем

$$L_1(\xi) = \frac{S(\Delta \xi a_2 a_3)}{S(T)}, \quad L_2(\xi) = \frac{S(\Delta a_1 \xi a_3)}{S(T)}, \quad L_3(\xi) = \frac{S(\Delta a_1 a_2 \xi)}{S(T)},$$

где

$$S(T) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим свойства функций функций:

- $L_i \in P_1(T)$;
- $0 \le L_i(\xi) \le 1, \quad \xi \in T$;
- $L_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1,3}$;

- $\sum\limits_{i=1}^{3} L_i(\xi) = 1.$

Построенные функции формы имеют геометрическую интерпретацию: они являются барицентрическими координатами произвольной точки $\xi \in T$ относительно вершин треугольник a_i

$$T = \{\xi = a_1\lambda_1(\xi) + a_2\lambda_2(\xi) + a_3\lambda_3(\xi) \ : \ 0 \le \lambda_i \le 1, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\},$$

где $\lambda_i(x, y) = L_i(x, y)$. Отметим некоторые свойства барицентрических координат, которые будут использоваться при построении функций формы для P_n-элементов, $n > 1$,

- при $\lambda_i = 1$ барицентрические координаты задают вершину a_i;
- при $\lambda_i = 0$ барицентрические координаты задают точки стороны треугольника, противолежащей вершине a_i;
- при $\lambda_i = 0.5$ барицентрические координаты задают точки средней линии, противолежащей вершине a_i.

Теорема 5.2. *Пусть T является d-симплексом с вершинами a_i, $i = 1, \dots, d+1$ (выпуклая оболочка точек a_i, не принадлежащих гиперплоскости). Тогда для заданного целого $n \ge 0$ всякий многочлен $p \in P_n(T)$ однозначно определяется своими значениями на множестве*

$$\left\{\xi = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \in \left\{0, \frac{1}{n}, \dots \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \quad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1\right\}.$$

Условиям Теоремы 5.2 соответствуют треугольные конечные элементы при $d = 2$, например на Рис. 1 (Lineares Dreieckelement, Quadratisches Dreieckelement, Kubisches Dreieckelement), а также тетраэдральные конечные элементы при $d = 3$.

5.2.2 Афинные семества треугольных конечных элементов

Предположим, что задано семейство треугольных конечных элементов (T, Π, Σ), отличие между которыми только в задании элемента T. Целью является поиск наиболее простого описания такого семейства. Практическая реализация и анализ метода значительно упрощается, если все конечные элементы, соответствующие разбиению области, могут быть получены из одного **типового элемента**.

Обозначим через $\hat{T}$ типовой треугольник с вершинами $\hat{a}_1 = (0, 0), \hat{a}_2 = (1, 0), \hat{a}_3 = (0, 1)$. Произвольный тругольник T может быть получен из типового треугольника $\hat{T}$ с помощью афинного преобразования F

$$F_T : \hat{T} \to T, \quad F_T(\hat{\xi}) = B_T\hat{\xi} + d_T,$$

где $B_T = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}, d_T \in \mathbb{R}^2$. Матрица B_T и вектор d_T определяются из условия соответствия вершин $F_T(\hat{a}_i) = a_i, i = \overline{1, 3}$. Имеем

$$F_T(\hat{a}_1) = d_T \quad \Rightarrow \quad d_T = a_1,$$

$$F_T(\hat{a}_2) = b_1 + d_T \quad \Rightarrow \quad b_1 = a_2 - a_1,$$

$$F_T(\hat{a}_3) = b_2 + d_T \quad \Rightarrow \quad b_2 = a_3 - a_1.$$

Тогда матрица $B_T = (a_2 - a_1, a_3 - a_1)$. Матрица B_T является невырожденной, так как $\det B_T = 2S(T)$, следовательно существует обратное преобразование $F_T^{-1} : T \to \hat{T}$.

Возьмем произвольную точку $\hat{\xi}$ на типовом элементе, барицентрические координаты которой обозначи через $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$. Тогда имеем, что

$$F_T(\hat{\xi}) = F_T\left(\sum_{i=1}^{3} \hat{\lambda}_i \hat{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \hat{\lambda}_i F_T(\hat{a}_i) = \sum_{i=1}^{3} \hat{\lambda}_i a_i,$$

т.е. преобразование F_T не изменяет барицентрические координаты точек треугольника.

Взаимно однозначное соответствие между точками множеств $\hat{T}$ и T позволяет ассоциировать пространство Π_T с пространством $\hat{\Pi}$

$$\Pi_T = \{p : T \to \mathbb{R}; \quad p = \hat{p} \circ F_T^{-1}, \quad \hat{p} \in \hat{\Pi}\}.$$

Другими словами, вместо описания семейства конечных элементов данными $(T, \Pi(T), \Sigma(T))$ для каждого элемента достаточно задать один типовой конечный элемент $(\hat{T}, \hat{\Pi}(\hat{T}), \hat{\Sigma}(\hat{T}))$ и афинные отображения F_T для каждого элемента. Говорят тогда, что произвольный конечный элемент (T, Π, Σ) афинно-эквивалентен типовому конечному элементу $(\hat{T}, \hat{\Pi}, \hat{\Sigma})$ и определяется преобразованием F_T. Семейство треугольных конечных элементов является аффиным семейством, так как все его элементы афинно-эквивалентны одному конечному элементу. Такая связь является существенной для реализации и анализа метода конечных элементов. Вычисления коэффициентов линейной системы $Az = b$, представляющей дискретную задачу, производится на типовом конечном элементе, а не на общем конечном элементе.

Задания

Задание 5.1 (теория)**.** Построить базисные функции для P_1-элемента на типовом треугольнике $\hat{T}$ с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$.

Задание 5.2 (теория)**.** Построить базисные функции для P_2-элемента, где

$$\Sigma = \{p(a_1), p(a_2), p(a_3), p(a_{12}), p(a_{13}), p(a_{23})\},$$

a_i — вершины треугольника, $a_{ij} = (a_i + a_j)/2$ для $i \neq j$. Базисные функции строятся из условий

$$L_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad a_j \in \{a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}\}$$

и выражаются через барицентрические координаты треугольника. Например,

$$L_1(x, y) = \lambda_1(\lambda_1 - 0.5)2 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1).$$

Задание 5.3 (теория)**.** Построить базисные функции для P_3-элемента, где

$$\Sigma = \{p(a_1), p(a_2), p(a_3), p(a_{112}), p(a_{113}), p(a_{221}), p(a_{223}), p(a_{331}), p(a_{332}), p(a_{123})\},$$

a_i — вершины треугольника, $a_{iij} = (2a_i + a_j)/3$ для $i \neq j$ и $a_{123} = (a_1 + a_2 + a_3)/3$. Базисные функции строятся из условий

$$L_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad a_j \in \{a_1, a_2, a_3, a_{112}, a_{113}, a_{221}, a_{223}, a_{331}, a_{332}, a_{123}\}$$

и выражаются через барицентрические координаты треугольника. Например,

$$L_1(x, y) = \frac{9}{2}\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{3})(\lambda_1 - \frac{2}{3}) = \lambda_1(3\lambda_1 - 1)(3\lambda_1 - 2)/2.$$

Задание 5.4 (теория)**.** Построить базисные функции для P_1-элемента на типовом тетраэдре $\hat{T}$ с вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$.

Задание 5.5 (практика)**.** Изобразить графически базисные функции для P_3-элемента на типовом треугольнике $\hat{T}$ с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Базисные функции для P_3-элемента строятся в Задании 5.3 через барицентрические координаты произвольного треугольника. Барицентрические координаты треугольника совпадают с базисными функциями для P_1-элемента $\lambda_i(x,y) = L_i(x,y), \quad i = \overline{1,3}$. Базисные функции для P_1-элемента на типовом треугольнике строятся в Задании 5.1.

Задание 5.6 (практика)**.** Изобразить графически базисные функции для P_3-элемента на произвольном треугольнике T. Используйте результат предыдущего задания, а также афинное преобразование $F_T(\hat{\xi})$ типового трегольника в произвольный треугольник, см. раздел 5.2.2.

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.