1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

4 Существование и единственность решения вариационной задачи

Определение 4.1. Пусть H — гильбертово пространство. Линейная форма $< l, v >: H \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной**, если $\exists C > 0$, что

$$| < l, v > | \leq C||v||_H \quad \forall v \in H.$$

Билинейная форма $a : H \times H \to \mathbb{R}$ называется непрерывной, если $\exists C > 0$, что

$$|a(u, v)| \leq C||u||_H||v||_H \quad \forall u, v \in H.$$

Определение 4.2. Пусть H — гильбертово пространство. Билинейная форма называется эллиптической (H-эллиптической), если $\exists \alpha > 0$, что

$$a(v, v) \geq \alpha||v||_H^2 \quad \forall v \in H.$$

Эллиптическая билинейная форма порождает **энергетическую норму** в пространстве H

$$||v||_a := \sqrt{a(v, v)}.$$

Энергетическая норма, порожденная непрерывной эллиптической билинейной формой, эквивалентна норме пространства H

$$\sqrt{\alpha}||v||_H \leq ||v||_a \leq \sqrt{C}||v||_H.$$

Отметим, что эквивалентные нормы порождают одинаковую топологию в пространстве H:

- если последовательность элементов сходится к элементу u в одной норме, тогда последовательность сходится к этому же элементу в эквивалентной норме;
- если пространство является полным, то оно также полное относительно энергетической нормы;
- если линейный функционал ограничен, то он ограничен также в энергетической норме.

Лемма 4.1 (Лакса-Мильграма о существовании единственного решения)**.** *Пусть V — замкнутое выпуклое подпространство гильбертова пространства H и $a : H \times H \to \mathbb{R}$ — непрерывная эллиптическая билинейная форма. Тогда $\forall l \in H'$, где H' — пространство непрерывных линейных функционалов на H, задача минимизации*

$$\min \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - < l, v > \ | \ v \in V \right\}$$

имеет единственное решение.

Замечание 4.1. В случае, когда $V = H$, выполнение условий леммы Лакса-Мильграма 4.1 гарантируют существование единственного решения $u \in H$ вариационных уравнений

$$a(u,v) =< l, v > \quad \forall v \in H$$

для каждого $l \in H'$. В частном случае, когда $a(u,v) := (u,v)_0$, билинейная форма является непрерывной и эллиптичной, следовательно существует единственная функция $u \in H$, что

$$(u,v)_0 =< l, v > \quad \forall v \in H$$

для каждого $l \in H'$. Таким образом, построено отображение $H' \to H$, где линейному функционалу l поставлена в соответствие единственная функция u. Построенное отображение называется каноническим представлением функционала.

Замечание 4.2. В Теореме 2.2 сформулированы условия существования единственного решения задачи минимизации в более широком линейном (векторном) пространстве. Поэтому ограничения на билинейную форму и линейный функционал в Теореме 2.2 являются более слабыми, чем для Теоремы Лакса-Мильграма 4.1. В частности, для однозначной разрешимости задачи минимизации в линейном пространстве билинейная форма $a(u,v)$ должна быть симметричной и положительной, функционал $l(v)$ линейным.

4.1 Однородная задача Дирихле

Для однородной задачи Дирихле

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad x \in \Omega & (1)\\ u &= 0 \quad x \in \partial\Omega, & (2) \end{aligned}$$

где

$$Lu = -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i \left(a_{ik}(x)\partial_k u(x)\right) + c(x)u(x)$$

вариационная задача имеет следующий вид (см. подраздел 2.1.1):

Найти $u \in V$ такую, что

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V, \tag{3}$$

где

$$a(u,v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\partial_k u \partial_i v + uv\right] dx, \tag{4}$$

$$< l, v >= \int_\Omega f v dx. \tag{5}$$

В подразделе 2.1.1 пространство V определено, как $V = \{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$.

Теорема 4.1. *Пусть $V = H_0^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $c \geq 0$ и билинейная форма (4) является* **равномерно эллиптической**

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\partial_k v \partial_i v \geq \alpha \sum_i (\partial_i v)^2$$

для вариационной задачи (3)–(5). Тогда однородная задача Дирихле (1)–(2) имеет единственное обобщенное решение $u \in H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 необходимо показать, что билинейная форма (4) является непрерывной и эллиптической в $H_0^1(\Omega)$, а линейный функционал (5) является непрерывным в $H_0^1(\Omega)$.

1. Покажем, что билинейная форма (4) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$. Пусть

$$\tilde{c} := \sup\left\{|a_{ik}(x)|; x \in \Omega, \quad i,k = \overline{1,n}\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}\partial_k u \partial_i v\right] dx\right| &= \left|\sum_{i,k=1}^n \int_\Omega [a_{ik}\partial_k u\partial_i v]\, dx\right| \le \sum_{i,k=1}^n \left|\int_\Omega [a_{ik}\partial_k u\partial_i v]\, dx\right| \\
&\le \tilde{c}\sum_{i,k=1}^n \left|\int_\Omega \partial_k u \partial_i v dx\right| \underset{\to}{\text{н-во Буняковского}} \\
&\le \tilde{c}\sum_{i,k=1}^n \left[\int_\Omega (\partial_k u)^2\, dx\right]^{1/2} \left[\int_\Omega (\partial_i v)^2\, dx\right]^{1/2} \underset{\to}{\text{разделение переменных}} \\
&= \tilde{c}\sum_{k=1}^n \left[\int_\Omega (\partial_k u)^2\, dx\right]^{1/2} \sum_{i=1}^n \left[\int_\Omega (\partial_i v)^2\, dx\right]^{1/2} \underset{\to}{\text{н-во Коши}} \\
&\le \tilde{c}\left[\sum_{k=1}^n 1^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^n \int_\Omega (\partial_k u)^2\, dx\right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^n 1^2\right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^n \int_\Omega (\partial_i v)^2\, dx\right]^{1/2} \\
&= \tilde{c}n|u|_1|v|_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\le \tilde{c}n|u|_1|v|_1 + c||u||_0||v||_0 \underset{\to}{\text{н-во Фридрихса}} \\
&\le \tilde{c}n|u|_1|v|_1 + cs^2|u|_1|v|_1 \le C|u|_1|v|_1.
\end{aligned}$$

Следовательно, билинейная форма (4) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$.

2. Покажем, что билинейная форма (4) является эллиптической в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
a(v,v) &\ge \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}\partial_k u \partial_i v\right] dx \underset{\to}{\text{свойство равномерной эллиптичности}} \\
&\ge \int_\Omega \left[\alpha \sum_i (\partial_i v)^2\right] dx = \alpha|v|_1^2.
\end{aligned}$$

Билинейная форма (4) является эллиптической в $H_0^1(\Omega)$.

3. Покажем непрерывность линейной формы (5) в $H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
|< l, v >| &= \left|\int_\Omega fvdx\right| \underset{\to}{\text{н-во Буняковского}} \\
&\le ||f||_0||v||_0 \underset{\to}{\text{н-во Фридрихса}} \\
&\le c|v|_1.
\end{aligned}$$

Линейная форма (5) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 однородная задача Дирихле (1)–(2) имеет единственное обобщенное решение в $H_0^1(\Omega)$. Теорема доказана. □

Определение 4.3. Функция $u \in H_0^1(\Omega)$ называется **обобщенным (слабым) решением** однородной задачи Дирихле (1)–(2) если она является решением вариационной задачи (3)–(5) в пространстве $V = H_0^1(\Omega)$.

Обобщенное решение является обобщением понятия классических решений дифференциальных уравнений. Это понятие возникло в связи с многими задачами математической физики, когда под решениями дифференциальных уравнений потребовалось понимать функции, не имеющие достаточного числа производных.

Понятие обобщенного решения не противоречит понятию классического решения.

Теорема 4.2. *Каждое обобщенное решение $u \in H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле (1)–(2), для которого $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, является также классическим решением задачи Дирихле.*

В дальнейшем полагаем, что обобщенное решение любой эллиптической краевой задачи (не только однородной задачи Дирихле) — это решение соответствующей вариационной задачи в некотором гильбертовом пространстве.

Пример 4.1. Рассмотрим однородную задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u(x) &= 0 \quad x \in \Omega \\ u &= 0 \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Пусть $V = H_0^1(\Omega)$. Соответствующая билинейная форма

$$a(u,v) := \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} \partial_i u \partial_i v \right] dx$$

является равномерно эллиптической ($\alpha = 1$), $f \equiv 0$, $c = 0$ следовательно однородная задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет единственное обобщенное решение в $H_0^1(\Omega)$. Если $V = H^1(\Omega)$, то свойство эллиптичности для билинейной формы не выполняется, т.к. для $v = const$ имеем, что $a(v,v) = 0$. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 вариационная задача может не быть однозначно разрешимой.

4.2 Задача Неймана

Для задачи Неймана

$$Lu = f \quad x \in \Omega \tag{6}$$

$$\sum_{i,k} n_i a_{ik} \partial_k u = g_N \quad x \in \partial\Omega \tag{7}$$

вариационная задача имеет следующий вид (см. подраздел 2.1.3):

Найти $u \in V$ такую, что

$$a(u,v) = < l, v > \quad \forall v \in V, \tag{8}$$

где

$$a(u,v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_k u \partial_i v + cuv \right] dx, \tag{9}$$

$$< l, v >= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g_N v ds. \tag{10}$$

Сформулируем результат однозначной разрешимости в обобщенном смысле для задачи Неймана, аналогичный Теореме 4.1.

Теорема 4.3. *Пусть $V = H^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $g_N \in L_2(\partial\Omega)$, $\underline{c(x) \geq \beta > 0}$ и билинейная форма (9) является равномерно эллиптической*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_k v \partial_i v \geq \alpha \sum_i (\partial_i v)^2 .$$

Тогда задача Неймана (6)–(7) имеет единственное обобщенное решение в $H^1(\Omega)$, т.е. единственное решение вариационной задачи (8)–(10) при $V = H^1(\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 необходимо показать, что билинейная форма (9) является непрерывной и эллиптической в $H^1(\Omega)$, а линейный функционал (10) является непрерывным. При доказательстве Теоремы 4.1 показано, что билинейная форма (9) является непрерывной в $H_0^1(\Omega)$

$$|a(u, v)| \leq C |u|_1 |v|_1,$$

следовательно билинейная форма является непрерывной в $H^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \int_{\Omega} \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_k u \partial_i v \right] dx + \beta ||v||_0^2 \xrightarrow{\text{свойство равномерной эллиптичности}} \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} \sum_i (\partial_i v)^2 dx + \beta ||v||_0^2 \\ &\geq \min\{\alpha, \beta\} ||v||_1^2. \end{aligned}$$

Билинейная форма (9)является эллиптической в $H^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} |< l, v >| &= \left| \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds \right| \xrightarrow{\text{н-во Буняковского}} \\ &\leq ||f||_0 ||v||_0 + ||g||_{0,\partial\Omega} ||v||_{0,\partial\Omega} \xrightarrow{\text{н-во Фридрихса, Теорема о следе}} \\ &\leq c ||v||_1. \end{aligned}$$

Линейная форма является непрерывной в $H^1(\Omega)$. Согласно лемме Лакса-Мильграма 4.1 задача Неймана (6)–(7) имеет единственное обобщенное решение в $H^1(\Omega)$. Теорема доказана. □

Замечание 4.3. При переходе от краевой задачи к вариационной задаче условие Неймана не влияет на определение функционального пространства тестовых функций, но изменяет вариационные уравнения. Условие Неймана называется **естественным условием** в контексте вариационной постановки. Условие Дирихле влияет на определение функционального пространства и называется **существенным условием**.

Пример 4.2. Рассмотрим ситуацию, когда условие $c(x) \geq \beta > 0$ не выполняется, т.е. $c(x) = 0$. В этом случае нельзя доказать эллиптичность билинейной формы ($a(v, v) = 0$ для $v = const$) и, как следствие, задача Неймана не будет иметь единственное решение в $H^1(\Omega)$.

Пусть задана задача Неймана для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad x \in \Omega \\ \sum_i n_i \partial_i u &= g_N \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Соответствующая билинейная форма имеет вид

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \quad a(v,v) = |v|_1^2.$$

Билинейная форма не является эллиптической в $H^1(\Omega)$. Непосредственно из краевой задачи видно, что решение определяется с точностью до константы. Для того, чтобы вариационная задача имела единственное решение, вместо $H^1(\Omega)$ рассматривается подпространство без констант $V := \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v dx = 0\}$ (функции, ортогональные постоянной функции в $L_2(\Omega)$). Тогда существует аналог неравенства Фридрихса для функций из $H^1(\Omega)$

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad ||v - \bar{v}||_1 \leq c(\Omega)|v|_1, \quad \bar{v} = \int_\Omega v(x)dx/\mu(\Omega).$$

Имеем, что билинейная форма является V-эллиптической, тогда существует единственное обобщенное решение на V для рассматриваемой задачи Неймана.

4.3 Неоднородная задача Дирихле, смешанная краевая задача

Пример 4.3. Для задачи Дирихле с неоднородным условием

$$\begin{aligned} -\sum_{i,k=1}^n \partial_i \left(a_{ik}(x)\partial_k u(x)\right) + c(x)u(x) &= f \quad x \in \Omega \\ u &= g \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

в подразделе 2.1.2 построена вариационная задача:

Найти $w \in V$ такую, что

$$a(w,v) = < l, v > \quad \forall v \in V, \tag{11}$$

где

$$a(w,v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}\partial_k w \partial_i v + cwv\right] dx, \tag{12}$$

$$< l, v > = \int_\Omega fv dx - a(u_0, v). \tag{13}$$

Полагаем $V = H_0^1(\Omega)$ и $u = w + u_0 \in U = H^1(\Omega)$.

Для вариационной задачи в пространстве $H_0^1(\Omega)$ применима Теорема 4.1. А именно, для однозначной разрешимости вариационной задачи должны выполняться условия, что $f \in L_2(\Omega)$, $c \geq 0$ и билинейная форма равномерно эллиптическая. Из требования полноты необходимо положить $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.

Пример 4.4. Для краевой задачи со смешанными граничными условиями

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad x \in \Omega \\ u &= g_D \quad x \in \Gamma_D, \\ \sum_{i,k} n_i a_{ik} \partial_k u &= g_N \quad x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

в подразделе 2.1.4 построена вариационная задача:

Найти $w \in V$ такую, что

$$a(w,v) =< l, v > \quad \forall v \in V, \tag{14}$$

где

$$a(w,v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_k w \partial_i v + cwv \right] dx, \tag{15}$$

$$< l, v >= \int_\Omega f v dx - a(u_0, v) + \int_{\Gamma_N} g_N v ds. \tag{16}$$

Полагаем $V = H^1(\Omega)$ и $u = w + u_0 \in U = \{v : v \in H^1(\Omega), v = g_D \text{ на } \Gamma_D\}$.

Аналогично рассуждениям в доказательстве Теоремы 4.3 можно показать, что фунционал (16) является непрерывным. Тогда имеем, что при выполнении условий Теоремы 4.3, краевая задача со смешанными граничными условиями будет иметь единственное решение на пространстве $H^1(\Omega)$.

Задания

Задание 4.1 (теория)**.** Для краевой задачи

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x) \quad x \in \Omega = (0,1) \\ u &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

где $p(x) \in C^1(\Omega), p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \in C(\Omega), q(x) \geq 0, f(x) \in C^2(\Omega)$, построить вариационную формулировку и показать, что задача имеет единственное обобщенное решение в $H_0^1(\Omega)$.

Задание 4.2 (теория)**.** Задана эллиптическая, но не равномерно эллиптическая билинейная форма $a : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$

$$a(u,v) := \int_0^1 x^2 u' v' dx$$

и функционал

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - \int_0^1 v dx.$$

Необходимо построить дифференциальное уравнение, соответствующее минимизации функционала, и показать, что решение $u \notin H_0^1$, т.е. $|u|_1$ не существует (соответствующий интеграл расходится).

Задание 4.3 (теория)**.** Для краевой задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -u'' + \varepsilon u &= f \quad x \in \Omega = (0,1) \\ u &= 0 \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

исследовать вопрос существования единственного решения при различных значениях ε.

Задание 4.4 (практика)**.** Необходимо построить конечно-элементное решение для задачи Дирихле в единичном квадрате из Задания 1.5 на четырех последовательных сетках (равномерное разбиение при переходе от сетки к сетке) с использованием линейных треугольных элементов и вычислить экспериментальные порядки сходимости в L_2-норме и H^1-норме.

1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & (x,y)\in\Omega=(0,1)^2 \\ u &= g_D, & (x,y)\in\partial\Omega. \end{cases}$$

Для заданного точного решения $u(x,y)$ из Задания 1.2 (по вариантам) постройте задачу Дирихле и решите задачу с помощью метода конечных элементов на четырех последовательных сетках (равномерное разбиение при переходе от сетки к сетке). При реализации средствами GUI PDEToolbox Matlab будем иметь конечно-элементные решения uh_i на соответствующих сетках T_i, описанных массивами $(p_i, e_i, t_i), i=\overline{1,4}$.

2. Введем обозначение для функции ошибки на сетке T_i

$$e_i := u - uh_i \quad i=\overline{1,4}.$$

Полагаем, что H^m-норма ошибки на первой сетке e_1 удовлетворяет соотношению

$$||e_1||_m = Ch_1^r$$

для некоторой константы C и порядка сходимости r метода конечных элементов, где h_1 обозначает максимальную длину стороны треугольника сетки T_1. Так как сетка T_2 строится равномерным разбиением сетки T_1, то для функции ошибки на второй сетке выполняется

$$||e_2||_m = C\left(\frac{h_1}{2}\right)^r.$$

Разделим первую ошибку на вторую и получим формулу для вычисления экспериментального порядка сходимости r_{12} при переходе от первой сетки ко второй

$$\frac{||e_1||_m}{||e_2||_m} = 2^r \quad \Rightarrow \quad r_{12} = \log_2\frac{||e_1||_m}{||e_2||_m}.$$

Аналогичным образом вычисляется экспериментальный порядок сходимости r_{23} при переходе от второй сетки к третьей

$$r_{23} = \log_2\frac{||e_2||_m}{||e_3||_m}.$$

Экспериментальные порядки сходимости r_{12}, r_{23}, r_{34}, необходимо вычислить в L_2-норме $(m=0)$ и H^1-норме $(m=1)$.

- Вычисление L_2-нормы $(m=0)$ ошибки осуществляется по формуле

$$||e_i||_0 = \left[\int_\Omega (u-uh_i)^2 dxdy\right]^{1/2}, \quad i=\overline{1,4}.$$

  Для приближенного вычисления интеграла воспользуемся кубатурной формулой средних

$$||e_i||_0 \approx l2error_i := sqrt(sum(area.*(mu-mu_i).^2)) \quad i=\overline{1,4},$$

  где $area$ обозначает вектор площадей треугольников сетки T_i, mu — вектор значений функции u в серединах треугольных элементов сетки, mu_i — вектор значений конечно-элементного решения uh_i в серединах треугольных элеементов. Для вычисления $area$ можно использовать встроенную функцию $pdetrg(p_i, t_i)$, для вычисления mu_i — встроенную функцию $pdeintrp(p_i, t_i, u_i)$.

- Вычисление H^1-нормы ($m = 1$) ошибки осуществляется по формуле

$$||e_i||_1 = \left[\int_\Omega \left((u - uh_i)^2 + \nabla(u - uh_i)^2\right) dxdy\right]^{1/2} \quad i = \overline{1,4}.$$

Для приближенного вычисления интеграла воспользуемся кубатурной формулой средних и результатом вычисления L_2-нормы ошибки

$$||e_i||_1 \approx h1error_i := sqrt(l2error_i^2 + sum(area. * \left((mux - mux_i).^2) + (muy - muy_i).^2)\right)),$$

где $i = \overline{1,4}$, mux, muy — вектора значений первых производных по x и по y точного решения u в серединах треугольных элементов сетки T_i, mux_i, muy_i — вектора значений первых производных конечно-элементного решения uh_i в серединах треугольных элементов. Для вычисления mux_i, muy_i можно использовать встроенную функцию $pdegrad(p_i, t_i, u_i)$.

3. Сравните полученные экспериментальные порядки сходимости r_{12}, r_{23}, r_{34}, посчитанные в L_2- и H^1-норме, с теоретическими результатами.

В теории метода конечных элементов известны следующие результаты

Теорема 4.4 (Теорема 3.2.2 в [7]). *Если решение $u \in V$ вариационной задачи принадлежит пространству $H^{k+1}(\Omega)$, то существует такая не зависящая от h постоянная C, что*

$$||u - u_h||_1 \leq Ch^k|u|_{k+1} = O(h^k),$$

где $u_h \in V_h \subset V$ – конечно-элементное решение, построенное на элементах k-го порядка.

Теорема 4.5 (Теорема 3.2.5 в [7]). *Если решение $u \in V$ вариационной задачи принадлежит пространству $H^{k+1}(\Omega)$, то существует такая не зависящая от h постоянная C, что*

$$||u - u_h||_0 \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1} = O(h^{k+1}),$$

где $u_h \in V_h \subset V$ – конечно-элементное решение, построенное на элементах k-го порядка.

В частности имеем, что для линейных элементов ($k = 1$) при достаточной гладкости точного решения $u \in H^{k+1}$ ошибка $u - u_h$ имеет первый порядок сходимости в H^1-норме и второй порядок сходимости в L_2-норме

$$||u - u_h||_1 = O(h), \quad ||u - u_h||_0 = O(h^2).$$

4. Экспериментальные порядки сходимости метода конечных элементов можно считать, когда точное решение задачи неизвестно. Тогда

$$r_{123} = \log_2 \frac{||uh_1^{(T_1)} - uh_2^{(T_1)}||_m}{||uh_2^{(T_1)} - uh_3^{(T_1)}||_m}, \quad r_{234} = \log_2 \frac{||uh_2^{(T_2)} - uh_3^{(T_2)}||_m}{||uh_3^{(T_2)} - uh_4^{(T_2)}||_m},$$

где $uh_i^{(T_j)}$ соответствует интерполяции дискретного решения uh_i на сетку T_j.

Посчитайте порядки сходимости, не используя информацию о точном решении, и сравните с теоретическими результатами о порядке сходимости.

Задание 4.5 (практика)**.** Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в сегменте единичного круга со внутренним углом ω, сформулированную в полярной системе координат (r, ϕ) для прямоугольной области $\Omega = \{(r, \phi) \,:\, 0 < r < 1, 0 < \phi < \omega\}$ в виде

$$\begin{cases} -\Delta_{r\phi} u &= 0, & (r, \phi) \in \Omega \\ u &= 0, & \phi = 0 \text{ или } \phi = \omega \\ u &= \sin \beta\phi, & r = 1, \end{cases}$$

где $\Delta_{r\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$ – оператор Лапласа, записанный в полярных координатах. Аналитическое решение задачи может быть построено методом разделения переменных в виде

$$u(r, \phi) = r^\beta \sin \beta\phi.$$

Для принадлежности функции u пространству $H^2(\Omega)$ достаточно показать, что

$$\int_0^\omega \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)^2 r dr d\phi < \infty.$$

Имеем, что

$$\int_0^\omega \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)^2 r dr d\phi = \omega \int_0^1 \Big(\beta(\beta - 1) r^{\beta - 2}\Big)^2 r dr.$$

Интеграл принимает конечное значение в случае, когда степень r будет > -1, т.е. $2\beta - 3 > -1 \Rightarrow \beta > 1$. Имеем, что $u \in H^2(\Omega)$ для $\beta > 1$, т.е. $0 < \omega < \pi$. Согласно теории при $\beta \leq 1$ $(\pi \leq \omega \leq 2\pi)$ $u \in H^{1+\beta}(\Omega)$. Это приводит, в частности, к снижению порядка сходимости метода конечных элементов в H^1-норме с $O(h)$ до $O(h^\beta)$.

1. Постройте конечно-элементное решение для задачи Дирихле в сегменте единичного круга со внутренним углом $\omega = 3\pi/2$ на четырех последовательных сетках (равномерное разбиение при переходе от сетки к сетке) с использованием линейных треугольных элементов и вычислите экспериментальные порядки сходимости в L_2-норме и H^1-норме.

   Для реализации используйте замену переменных

   $$r = \sqrt{x.^2 + y.^2}, \quad \phi = atan2(y, x) + 2 * pi * (y < 0).$$

2. Сравните экспериментальные порядки сходимости с теоретическими результатами: сходимость порядка $O(h^{1+\beta})$ в L_2-норме и сходимость порядка $O(h^\beta)$ в H^1-норме для $\beta = 2/3$.

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.