1 Введение

2 Интегральная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка

3 Пространства Соболева

3.1 Пространство Лебега

Все рассматриваемые функции и векторные пространства определены над полем действительных чисел. Пусть Ω открытая область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей. Пространство Лебега $L_2(\Omega)$ — это пространство классов эквивалентности измеримых функций $u(x) : \Omega \to \mathbb{R}$, квадратично суммируемых на Ω по Лебегу

$$L_2(\Omega) = \{u : \int_\Omega u^2 dx < \infty\}.$$

Приведем некоторые свойства функций из $L_2(\Omega)$.

Свойство 3.1.1. Для функций из $L_2(\Omega)$ можно задать скалярное произведение

$$(u, v)_0 := (u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega uvdx. \tag{1}$$

Величина

$$||u||_0 := \sqrt{(u, u)_0} = \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2} \tag{2}$$

называется нормой $u \in L_2(\Omega)$. Индекс нуль указывает на то, что в определении нормы не используются производные функции. $L_2(\Omega)$ — это бесконечномерное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение и выполнена аксиома полноты (гильбертово пространство).

Свойство 3.1.2. В $L_2(\Omega)$ выполняется неравенство Буняковского (неравенство Коши-Шварца)

$$|(u, v)_0| \le ||u||_0 ||v||_0$$

и неравенство Минковского

$$||u + v||_0 \le ||u||_0 + ||v||_0.$$

Отметим, что аналогом неравенства Буняковского для конечных сумм называется неравенством Коши. Неравенство Буняковского является частным случаем неравенства Гельдера для интегралов

$$|(u, v)_0| \le ||u||_{L_p} ||v||_{L_q}$$

для $u \in L_p(\Omega), v \in L_q(\Omega), \quad 1 \le p, q < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1$. Неравенство Минковского в общем случае

$$||u + v||_{L_p} \le ||u||_{L_p} + ||v||_{L_p}$$

для $u, v \in L_p(\Omega), \quad 1 \le p < \infty$.

Свойство 3.1.3. Функция $u \in L_2(\Omega)$ имеет **обобщенную (слабую) производную** $\partial^\alpha u$ порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в Ω, если $\partial^\alpha u \in L_2(\Omega)$ и выполняется равенство

$$(\partial^\alpha u, \phi)_0 = (-1)^{|\alpha|}(u, \partial^\alpha \phi)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3}$$

Переменная $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ обозначает мультииндекс, где α_i неотрицательные целые числа. Порядок индекса $|\alpha| = \sum \alpha_i$, оператор дифференцирования $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. $C^\infty(\Omega)$ — пространство непрерывных бесконечно-дифференцируемых функций в области Ω. Пространство $C_0^\infty(\Omega)$ является подпространством $C^\infty(\Omega)$, функции которого принимают значения, отличные от нуля, только на компактной подобласти Ω (финитные функции).

Обобщенная производная является распространением понятия производной на некоторые классы недифференцируемых функций. Если функция дифференцируема в классическом смысле, тогда существует ее обобщенная производная и обе производные совпадают.

Определение производной в $L_2(\Omega)$ переносится и на дифференциальные операторы. Например, для функции $u \in L_2(\Omega)^n$ существует оператор дивергенции $\nabla \cdot u$, если $\nabla \cdot u \in L_2(\Omega)$ и справедливо

$$(\nabla \cdot u, \phi)_0 = -(u, \nabla \cdot \phi)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пример 3.1. Покажем, что функция $u(x) \in L_2([0,1])$

$$u(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 0.5] \\ 2 - 2x, & x \in (0.5, 1] \end{cases}$$

дифференцируема в обобщенном смысле и построим ее обобщенную производную. Для этого необходимо показать выполнение равенства (3) при $\alpha = (1)$. Возьмем произвольную функцию $\phi \in C_0^\infty([0,1])$. С помощью формулы интегрирования по частям можно показать, что

$$\begin{aligned}
(-1)^1(\partial^1\phi, u)_0 &= -\left(\int_0^{0.5} \phi'(x)2x dx + \int_{0.5}^1 \phi'(x)(2-2x)dx\right) \\
&= -\left(-\int_0^{0.5} 2\phi(x)dx + u(0.5)\cdot\phi(0.5) - \int_{0.5}^1 -2\phi(x)dx - u(0.5)\cdot\phi(0.5)\right) \\
&= \int_0^{0.5} 2\phi(x)dx + \int_{0.5}^1 -2\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Имеем, что равенство (3) выполняется для любой $\phi \in C_0^\infty([0,1])$ и обобщенная производная равна

$$\partial^1 u(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, 0.5] \\ -2, & x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

Отметим, что в точке $x = 0.5$ обобщенная производная может быть определена произвольно.

Пример 3.2. Покажем, что функция $u(x) \in L_2([0,1])$

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 0.5] \\ 1, & x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

не дифференцируема в обобщенном смысле. Проверим выполнение равенства (3) при $\alpha = (1)$. Возьмем произвольную функцию $\phi \in C_0^\infty([0,1])$. С помощью формулы интегрирования по частям имеем, что

$$\begin{aligned}
(-1)^1(\partial^1\phi(x), u)_0 &= -\left(\int_0^{0.5} \phi'(x)\cdot 0dx + \int_{0.5}^1 \phi'(x)\cdot 1dx\right) \\
&= -\left(\phi(1) - \phi(0.5)\right) = \phi(0.5) = \int_0^1 \delta(x-0.5)\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

δ-функция $\notin L_2(\Omega)$, следовательно заданная функция u не имеет обобщенной производной. Таким образом получаем, что в рамках дифферецирования в обобщенном смысле, кусочно-дифференцируемую функцию не всегда можно кусочно-дифференцировать.

3.2 Пространства Соболева

Определение 3.1. Пространство Соболева $H^m(\Omega)$, где $m \in I^+$ — это множество функций $u \in L_2(\Omega)$, для которых существуют обобщенные производные $\partial^\alpha u$ при $|\alpha| \le m$ (α — мультииндекс)

$$H^m(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) \, : \, \partial^\alpha u \in L_2(\Omega), \, |\alpha| \le m\}.$$

Пространство Соболева определено и впервые применено в теории краевых задач математической физики. Отметим некоторые свойства пространств Соболева.

Свойство 3.2.1. Можно задать функцию скалярного произведения, определенную на $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$,

$$(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \le m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0,$$

определить норму

$$||u||_m := \sqrt{(u, u)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \le m} ||\partial^\alpha u||_0^2}$$

и полунорму

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha| = m} ||\partial^\alpha u||_0^2}.$$

Пространство $H^m(\Omega)$ является гильбертовым пространством (полное векторное пространство со скалярным произведением).

Особый интерес представляют пространства $H^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega)$. Для этих пространств имеем

$$(u, v)_1 = \sum_{|\alpha| \le 1} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 = (u, v)_0 + \sum_{|\alpha| = 1} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

$$(u, v)_2 = \sum_{|\alpha| \le 2} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 = (u, v)_1 + \sum_{|\alpha| = 2} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0.$$

Пример 3.3. Вычислить норму для функции $u(x) = \sin x$ в пространствах $H^m([0, 2\pi])$.

$$\begin{aligned}
||u||_0 &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \, dx} = \sqrt{\pi}. \\
||u||_1 &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(x) + \cos^2(x) dx} = \sqrt{2\pi}. \\
||u||_m &= \sqrt{(m+1)\pi}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство получено методом индукции.

Свойство 3.2.2. Пространство $L_2(\Omega)$ с нормой (2) является пространством Соболева $H^0(\Omega)$.

Свойство 3.2.3. $L_2(\Omega) = H^0(\Omega) \supset H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega) \supset \cdots$

Свойство 3.2.4. Неравенство Буняковского справедливо также для $||\cdot||_m$-нормы

$$\begin{aligned}
|(u,v)_m| &= \left|\sum_{|\alpha|\le m}(\partial^\alpha u,\partial^\alpha v)_0\right| \\
&\le \sum_{|\alpha|\le m}|(\partial^\alpha u,\partial^\alpha v)_0| \overset{\text{н-во Буняковского}}{\to} \\
&\le \sum_{|\alpha|\le m}||\partial^\alpha u||_0||\partial^\alpha v||_0 \overset{\text{н-во Коши}}{\to} \\
&\le \sqrt{\sum_{|\alpha|\le m}||\partial^\alpha u||_0^2}\sqrt{\sum_{|\alpha|\le m}||\partial^\alpha v||_0^2} \\
&= ||u||_m||v||_m.
\end{aligned}$$

Свойство 3.2.5. Другое определение пространства Соболева:
$H^m(\Omega)$ — это замыкание $C^\infty(\Omega)$ по норме $||\cdot||_m$;
$H_0^m(\Omega)$ — это замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $||\cdot||_m$.

Пространство $H_0^m(\Omega)$ состоит из функций $H^m(\Omega)$, чьи производные до порядка $|\alpha|\le m-1$ равны нулю на границе области. Пространство $H_0^m(\Omega)$ играет важную роль при решении эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка с условиями Дирихле на границе.

Свойство 3.2.6. Полунорма $|\cdot|_m$ и норма $||\cdot||_m$ эквивалентны в $H_0^m(\Omega)$, то есть выражаются одна через другую с точностью до умножения на константу. Этот результат формулируется в виде теоремы.

Теорема 3.1. $\forall v\in H_0^m(\Omega)$ *справедливо, что*

$$|v|_m \le ||v||_m \le (1+s)^m|v|_m,$$

где Ω ограниченное множество, которое содержится в кубе с длиной ребра s.

Теорема представляет собой результат обобщения **неравенства Фридрихса** (неравенство Пуанкаре-Фридрихса)

$$\forall v\in H_0^1(\Omega) \quad ||v||_0 \le c(\Omega)|v|_1$$

для ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. В частности, когда область Ω является n-мерным кубом с длиной ребра s, $c(\Omega)=s$.

Свойство 3.2.7. Приведем примеры неограниченных функций в $H^1(\Omega)$:

- в одномерном случае $H^1(\Omega)\subset C(\Omega)$, следовательно неограниченных функций в $H^1(\Omega)$ не существует;
- в двумерном случае $u=\ln\ln\frac{2}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$;
- в случае $n\ge 3$ $\quad u=r^{-\alpha}$ при $\alpha\le(n-2)/2$. С увеличением размерности сингулярность функций, попадающих в $H^1(\Omega)$, увеличивается.

Задания

Задание 3.1 (теория)**.** Показать, что функция $u(x)$ дифференцируема в обобщенном смысле и построить ее обобщенную производную.

Варианты:

1. $u(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1];$

2. $u(x) = |x| \exp(ax), \quad x \in [-1, 1];$

3. $u(x) = x|\arctan x - 1|, \quad x \in [-1, 1];$

4. $u(x) = \sin(|x|), \quad x \in [-1, 1];$

5. $u(x) = \sin(x)/|x|, \quad x \in [-1, 1];$

6. $u(x) = |x + 2|, \quad x \in [-3, 1];$

7. $$u(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in [0, 1] \\ 3x^2 - 2x + 1, & x \in (1, 3] \end{cases}$$

8. $$u(x) = \begin{cases} 2x/\pi, & x \in [0, \pi/2] \\ \sin x, & x \in (\pi/2, \pi] \end{cases}$$

9. $$u(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \exp(3x) - 1, & x > 0 \end{cases}$$

Задание 3.2 (теория)**.** Вычислите следующие нормы $||\partial^2 u||_0, ||\partial^1 u||_1, ||u||_2$ для функции из Задания 3.1. Для Вариантов 1 и 6 необходимо показать, что вторая производная не существует в обобщенном смысле.

Задание 3.3 (теория)**.** Показать, что функция $u(x) = 1 \notin H_0^1(\Omega)$, где Ω ограниченное множество. Воспользуйтесь неравенством Пуанкаре-Фридрихса.

Задание 3.4 (практика)**. Задача о рассеянии волны в канале**.

В канал входит плоская волна с длиной волны $\lambda = 0.2$ и в силу отражения от стенок рассеивается. Геометрия канала представлена на Рис. 1. Вход канала расположен слева, выход — сверху. Необходимо построить распределение волны на выходе из канала для различных геометрий стенок канала, см. Рис. 2–4, и оценить влияние геометрии канала на решение.

Математическая модель. Распространение волны в однородной среде описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

где c — скорость распространения волны. Полагаем, что волна является гармонической, то есть функция $u(x, y, t)$ допускает разделение переменных

$$u(x, y, t) = e^{2\pi i f t} U(x, y),$$

где f — частота волны. В этом случае волновое уравнение сводится к уравнению Гельмгольца

$$-k^2 U - \Delta U = 0,$$

где $k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны. На входе и выходе из канала формулируется условие излучения Зоммерфельда — вся излучаемая энергия должна уходить без потерь. Для монохроматической волны имеем условие на выходе

$$kiU + \frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

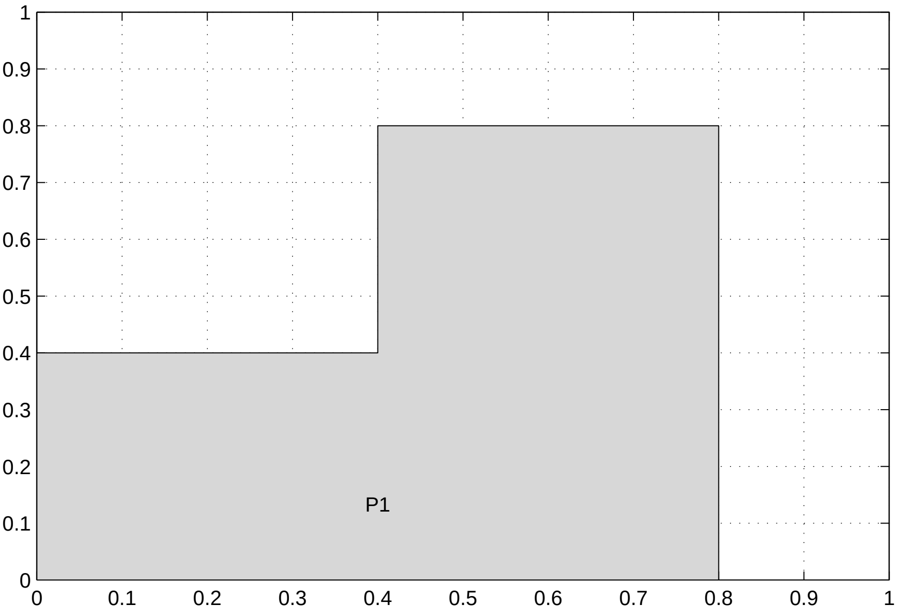

Рис. 1: Геометрия канала.

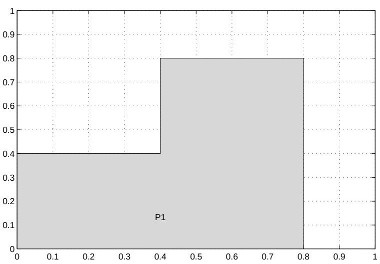

Рис. 2: Канал 1.

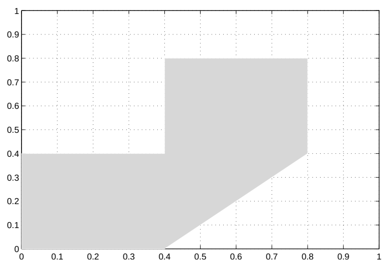

Рис. 3: Канал 2.

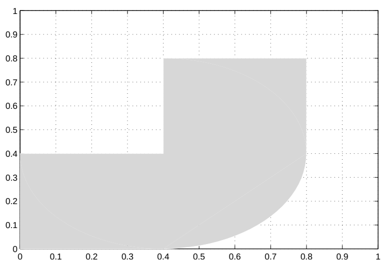

Рис. 4: Канал 3.

и условие на входе

$$ki(e^{-ikx} + U) + \frac{\partial(e^{-ikx} + U)}{\partial n} = 0$$

Последнее условие для рассматриваемой геометрии канала преобразуется к виду

$$ki(2 + U) + \frac{\partial U}{\partial n} = 0.$$

На стенках канала волна не перемещается, то есть $U(x, y) = 0$.

Комментарии по реализации в Matlab.

1. С помощью GUI PDEToolbox опишите область и граничные условия. Экспортируйте в Workspace матрицы g и b, описывающие область задачи и граничные условия (меню *Boundary*).

2. Постройте сетку в расчетной области таким образом, чтобы на длину волны приходилось 8–10 узлов сетки. Например,

$$\begin{array}{l} initmesh(g, \text{'Hmax'}, 0.2); \\ for \quad i = 1:3 \\ refinemesh(...); \\ end \end{array}$$

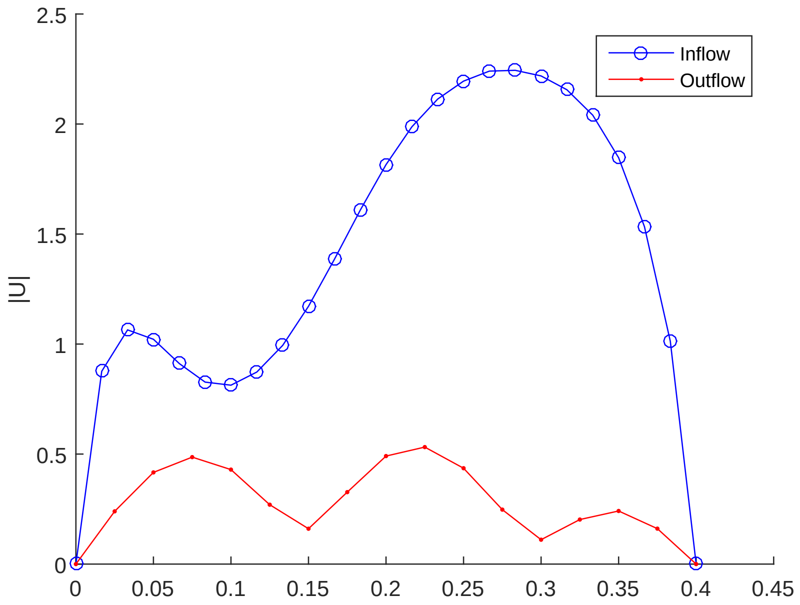

Рис. 5: Распределение волны на входе и выходе канала.

Постройте численное решение, например, с помощью функции assempde и изобразите $|U(x, y)|$.

3. Постройте график распределения волны на входе $p(1, :) == 0$ и выходе $p(2, :) == 0.8$, см. Рис. 5.

4. Рассмотрите три вида канала, см. Рис. 2–4, и сравните графически распределение волны на выходе, см. Рис. 6. Оцените по построенным графикам влияние геометрии канала на выходящую волну.

5. Постройте анимацию распространения волны $u(x, y, t) = e^{2\pi i f t}U(x, y)$ для одной из форм канала. Для реализации воспользуйтесь примером из справочной системы (Matlab R2015a) (*Help/PDE Toolbox Examples/Helmholtz's Equation on a Unit Disk with a Square Hole*).

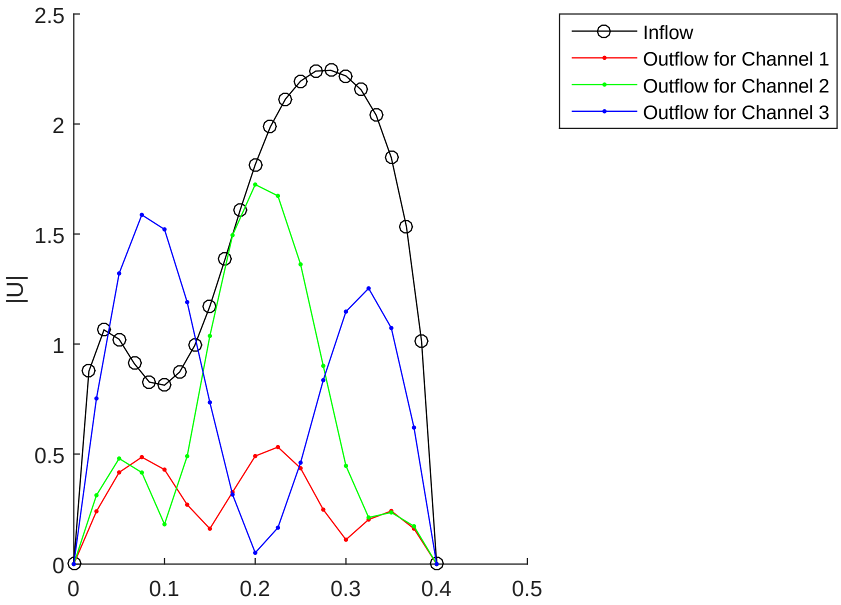

Рис. 6: Распределение волны на выходе для трех каналов.

Список литературы

[1] Владимиров, В.С. (1981): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[2] Оганесян, Л.А., Руховец Л.А. (1979): Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР.

[3] Тихонов, А.Н., Самарский А.А. (1977): Уравнения математической физики. М.: Наука.

[4] Шайдуров, В.В. (1989): Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука.

[5] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[6] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[7] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[8] Gekeler, E.W. (2006): Mathematische Methoden zur Mechanik. Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten. Berlin, Springer.

[9] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[10] Logg, A., Mardal K.-A. and Wells, G. N. (2012): Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer.

[11] Langtangen, H.P., Logg, A. (2016): Solving PDEs in Python — The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer.

[12] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.