FINITE-ELEMENTE-METHODE

Dr. rer. nat. O. Lavrova
Lehrstuhl Differentialgleichungen und Systemanalyse

Skriptum zur Vorlesungen

Studienjahr 4, 7. Semester
Deutschsprachiger Masterstudiengang COMPUTERMATHEMATIK
Fakultät für Mechanik und Mathematik, BSU

Inhaltsverzeichnis

Einführung **1**
Finite-Elemente-Methode 1
Typeneinleitung 1

1. Vorlesung. Sobolev-Räume **4**
Schwache Ableitung 4
Einführung der Sobolev-Räume. Poincare-Fridrichsche Ungleichung 5
Wortschatz 6

2. Vorlesung. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben zweiter Ordnung **7**
Wortschatz 9

3. Vorlesung. Existenz von Lösungen. Das Dirichlet-Problem **10**
Wortschatz 11

4. Vorlesung. Existenz von Lösungen. Das Neumann-Problem **12**
Wortschatz 13

5. Vorlesung. Ritz-Galerkin Verfahren **14**
Wortschatz 15

6. Vorlesung. Einfache Finite Elemente für die Poisson-Gleichung im Einheitsquadrat **17**
Wortschatz 18

7. Vorlesung. Finite-Element-Räume **19**
Formfunktionen 20
Referenzelement 21
Wortschatz 22

8. Vorlesung. Der Aufbau des Gleichungssystems **23**
Wortschatz 24

9. Lektion. Der Aufbau des Gleichungssystems II **25**

Literatur **26**

Einführung

Finite-Elemente-Methode

Die Methode der finiten Elemente (FEM) ist eines der praktisch wichtigsten Näherungsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen in den Ingenieurwissenschaften und der mathematischen Physik. Die Erfolge der FEM, insbesondere in der Festkörpermechanik, führten zu einer verstärkten Nutzung in der Thermodynamik, in der Strömungsmechanik und in anderen Gebieten.

Ursprünglich wurde die Methode in den fünfzigen Jahren von Ingenieuren entwickelt. Die ersten matematisch fundierten Untersuchungen stammen von K.O. Friedrichs (1962) und L.A. Oganesjan (1966). Als erstes Lehrbuch machte das Buch von Strang und Fix (1973) Geschichte.

Wir nehmen an, dass ein gegebenes stationäres technisches Problem durch ein Randwerproblem für eine Differentialgleichung beschreiben werde. Bei der Methode der finiten Elemente wird das z.B. zweidimensionale zugrunde liegende Gebiet in einfache Teilgebiete zerlegt, etwa in Dreiecke, Vierecke usw. Die FEM erzeugt dann ein Gleichungssystem für Näherungswerte der unbekannten Funktion in ausgezeichneten Punkten der Teilgebiete. Nach dem Lösen des Gleichungssystems sind die Werte der Unbekannten in den ausgezeichneten Punkten näherungsweise bekannt.

Bei partiellen Differentialgleichungen unterscheidet man mehrere Typen, insbesondere sind bei Differentialgleichungen 2. Ordnung die elliptischen, hyperbolischen und parabolischen von großer Bedeutung.

Die Theorie und die numerische Behandlung sind bei den drei Typen sehr unterschiedlich. Im Mittelpunkt der Methode der finiten Elemente steht die numerische Behandlung elliptischer Differentialgleichungen. Bei der numerischen Lösung elliptischer Probleme unterscheidet man wiederum zwieschen den Differenzenverfahren und den Variationsmethoden. Zu letzten gehört die Methode der finiten Elementen. Obwohl Finite Elemente gerade bei komplizierteren Geometrien als anpassungsfähiger gelten, setzt man bei einfachen Problemen noch oft Differenzverfahren.

Typeneinleitung

Die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in n Variablen hat die Gestalt

$$-\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)u_{x_ix_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x). \tag{1}$$

Falls die Funktionen a_{ik}, b_i und c unabhängig von x sind, spricht man von einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Weil für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u_{x_ix_k} = u_{x_kx_i}$ gilt, kann die Symmetrie $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$ vorausgesetzt werden. Die zugeordnete $n \times n$-Matrix

$$A(x) := (a_{ik}(x))$$

ist dann symmetrisch.

Definition 0.1

1. Die Gleichung (1) heißt elliptisch im Punkte x, wenn $A(x)$ positiv definit ist.

2. Die Gleichung (1) heißt hyperbolisch im Punkte x, wenn $A(x)$ einen negativen und $n-1$ positive Eigenwerte hat.

3. Die Gleichung (1) heißt parabolisch im Punkte x, wenn $A(x)$ positiv semidefinit, aber nicht definit ist und der Rang von $(A(x), b(x))$ gleich n ist.

4. Eine Gleichung heißt elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, wenn sie für alle Punkte des Gebiets die betreffende Eigenschaft hat.

Im elliptischen Fall wird die Gleichung (1) häufig kurz als

$$Lu = f$$

geschrieben und L als elliptischer Differentialoperator der Ordnung 2 bezeichnet. Der Ausdruck $-\sum a_{ik}(x)u_{x_ix_k}$ ist dann der Hauptteil von L. Bei hyperbolischen und parabolischen Problemen ist eine Richtung ausgezeichnet. Es ist in der Regel die Zeit, so daßman hyperbolischen Differentialgleichung oft in die Form

$$u_{tt} + Lu = f$$

bzw. parabolische in die Form

$$u_t + Lu = f$$

bringen kann, wobei L ein elliptischer Differentialoperator ist.

Aufgabe 0.1 Für welchen Werten von $a \in R$ und x sind die folgenden Gleichungen elliptisch?

$$-4u_{xx} + 2au_{xy} - u_{yy} = 0;$$

$$-u_{xx} + 2xu_{xy} - 5u_{yy} = axu_x.$$

Potentialgleichung als Prototyp elliptischer Differenzialgleichungen

Sei Ω ein Gebiet im R^2. Gesucht ist eine Funktion u auf Ω mit

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{2}$$

Zu dieser Differentialgleichung 2. Ordnung gehört die Vorgabe von Randwerten.

Der Differentialoperator in (2) ist der 2-dimensionale Laplace-Operator. Allgemein setzt man für Funktionen von n Variablen

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Ferner ist die Potentialgleichung ein Spezialfall der Poisson-Gleichung.

Sei Ω ein Gebiet im R^n, $n = 2$ oder 3. Wenn die Ladungsdichte $f : \Omega \to R$ in Ω bekannt ist, genügt die Spannung u der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f(x) \quad \text{in } \Omega. \tag{3}$$

Zur Differenzialgleichung (3) sind genauso wie bei der Potentialgleichung Randwerte vorzugeben.

Wellengleichung als Prototyp hyperbolischer Differenzialgleichungen

Bewegung in einem idealen Gas bei konstanten Temperatur wird durch die Wellengleichung für den Druck p bestimmt

$$p_{tt} = c^2 \Delta p.$$

Andere Beispliele für die Wellengleichung ergeben sich bei 2 Raumdimensionen für die schwingende Membran oder im eindomensionalen Fall mit dem schwingenden Seil.

Zu sinnvollen Problemen führt die Wellengleichung zusammen mit Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = g(x).$$

Wärmeleitungsgleichung als Prototyp parabolischer Differenzialgleichungen

Sei $T(x, t)$ die Temperaturverteilung in einem Körper. Die Energieänderung in einem Volumenelement setzt sich wegen die Energieerhaltung aus dem Wärmeflußüber die Oberfläche und der zugeführten Wärme Q zusammen. Davon erhalten wir die Wärmeleitungsgleichung

$$T_t = \sigma \Delta T + Q.$$

Bei parabolischen Problemen hat man es typischerweise mit Anfangsrandwertaufgaben zu tun.

Wortschatz

1. die partielle (gewönliche) Differentialgleichung, -en
2. Potentialgleichung, Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung
3. die Randbedingung, Anfangsbedingung, -en
4. der Eigenwert, Näherungswert, -e
5. das Näherungsverfahren, Differenzenverfahren, -
6. die Lösung, -en
7. die Festkörpermechanik, Strömungsmechanik, en
8. das Randwertproblem, -e
9. die Dreiecke, -n
10. das Gleichungssystem, -e

1. Vorlesung. Sobolev-Räume

Schwache Ableitung

Sei Ω eine offene Teilmenge des R^n mit stückweise glattem Rand. Die Sobolev Räume werden auf dem Funktionenraum $L_2(\Omega)$ aufgebaut. $L_2(\Omega)$ besteht aus allen Funktionen, deren Quadrat über Ω Lebesque-integrierbar ist (das Integral existiert und endlich ist)

$$L_2(\Omega) = \{u : \int_\Omega u^2 dx < \infty\}.$$

Im $L_2(\Omega)$ definiert man das Skalarprodukt

$$(u,v)_0 := (u,v)_{L_2} = \int_\Omega uv dx \tag{4}$$

und die Norm

$$||u||_0 := \sqrt{(u,u)_0}. \tag{5}$$

Der Index Null zeigt dabei an, dass bei der Definition der Norm keine Ableitung der Funktion verwendet werden.

In $L_2(\Omega)$ gilt die Ungleichung von Schwarz

$$(u,v)^2 \le ||u||_0^2 ||v||_0^2,$$

die auch Cauchy-Schwarz-Ungleichung genannt wird und die Dreiecksungleichung

$$||u+v||_0 \le ||u||_0 + ||v||_0.$$

Definition. $u \in L_2(\Omega)$ besitzt in $L_2(\Omega)$ die (schwache) Ableitung $\partial^\alpha u$, falls $\partial^\alpha u \in L_2(\Omega)$ und

$$(\phi, \partial^\alpha u)_0 = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \phi, u)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{6}$$

gilt. Hier bezeichnet $C^\infty(\Omega)$ den Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen und $C_0^\infty(\Omega)$ den Unterraum der Funktionen, die nur in einer kompakten Teilmenge von Ω von 0 verschiedene Werte annehmen.

Beispiel 1.1 Zeigen, dass die Funktion $u(x) \in L_2([0,1])$, die im klassischen Sinn nicht differenzierbar ist, hat aber eine schwache Ableitung.

Sei $u(x)$ definiert durch

$$u(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 0.5] \\ 2-2x, & x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

Für differenzierbare $\phi \in C_0^\infty([0,1])$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned} (-1)^1(\partial^1\phi, u)_0 &= -\left(\int_0^{0.5} \phi' 2x dx + \int_{0.5}^1 \phi'(2-2x)dx\right) \\ &= -\left(1\phi(0.5) - \int_0^{0.5} 2\phi dx - 1\phi(0.5) + \int_{0.5}^1 -2\phi dx\right) \\ &= \int_0^{0.5} 2\phi dx + \int_{0.5}^1 -2\phi dx. \end{aligned}$$

Wir haben, dass (6) gilt für alle Funktionen $\phi \in C_0^\infty([0,1])$ und die schwache Ableitung ist

$$\partial^1 u(x) \begin{cases} 2, & x \in [0, 0.5] \\ -2, & x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

Im Punkt $x = 0.5$ kann $\partial^1 u(x)$ beliebig festgesetzt werden.

Aufgabe 1.1 Man weise nach, dass die Funktion $u(x) = |x|$ auf dem Intervall [-1,1] die schwache Ableitung besitzt.

Bemerkung 1.1 Wenn eine Funktion im klassischen Sinne differenzierbar ist, existiert auch die schwache Ableitung, und beide Ableitungen stimmen überein.

Bemerkung 1.2 Der verallgemeinerte Ableitungsbegriff ermöglicht also, stückweise differenzierbare Funktionen stückweise zu differenzieren.

Bemerkung 1.3 Der Begriff der schwachen Ableitung wird auf anderen Differentialoperatoren entsprechend übertragen. Sei z.B. $u \in L_2(\Omega)^n$. Dann ist $\nabla \cdot u$ in schwachen Sinne, wenn $\nabla \cdot u \in L_2(\Omega)$ und

$$(\phi, \nabla \cdot u)_0 = -(\nabla\phi, u)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt.

Einführung der Sobolev-Räume. Poincare-Fridrichsche Ungleichung

Definition. Für ganzzahliges $m \geq 0$ bezeichne $H^m(\Omega)$ die Menge aller Funktionen $u \in L_2(\Omega)$ (Sobolev-Raum), die schwache Ableitungen $\partial^\alpha u$ für alle $|\alpha| \leq m$ besitzen.

Im $H^m(\Omega)$ wird durch

$$(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0,$$

ein Skalarprodukt mit der zugehörigen Norm

$$||u||_m := \sqrt{(u,u)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||_0^2}$$

und der Seminorm

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha| = m} ||\partial^\alpha u||_0^2}$$

erklärt.

Mit dieser Norm ist $H^m(\Omega)$ vollständig, also ein Hilbert-Raum.

Aufgabe 1.2 Berechnen Sie die Normen $||u||_2, ||\partial^1 u||_1, ||\partial^2 u||_0$ fü die gegebene Funktion

$$\begin{aligned} u(x) = & \quad 2x^2, & x \in [0,1] \\ = & \quad 3x^2 - 2x + 1, & x \in (1,3]. \end{aligned}$$

Definition. Die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)$ bzgl. Sobolev-Norm $||\cdot||_m$ wird mit $H^m(\Omega)$ bezeichnet. Die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. Sobolev-Norm $||\cdot||_m$ wird mit $H_0^m(\Omega)$ bezeichnet.

Der Funktionenraum $H_0^m(\Omega)$ spielt eine wichtige Rolle für die Lösung elliptischer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Dirichlet-Bedingungen auf dem Rand.

In den Räumen mit verallgemeinerten Nullrandbedingungen, d.h. in $H_0^m(\Omega)$, sind die Seminormen zu den Normen äquivalent.

Poincare-Fridrichssche Ungleichung. Sei Ω in einem n-dimensionalen Würfel der Kantenlange s enthalten. Dann ist

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad ||v||_0 \leq s|v|_1.$$

Durch die Anwendungen der Friedrichsschen Ungleichung auf Ableitungen erkennt man, dass

$$||\partial^\alpha v||_0 \leq s||\partial^1 \partial^\alpha v||_0 \quad \text{für } |\alpha| \leq m, \quad v \in H_0^m(\Omega)$$

gilt. Durch eine Induktion erhält man

Satz 1.1 Wenn Ω beschränkt ist, sind in $H_0^m(\Omega)$ die Normen $||\cdot||_m$ und $|\cdot|_m$ äquivalent. Ist Ω in einen Würfel der Kantenlange s enthalten, ist

$$|v|_m \leq ||v||_m \leq (1+s)^m |v|_m.$$

Aufgabe 1.3 Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Man zeige mit Hilfe der Friedrichsschen Ungleichung, dass die konstante Funktion $u(x) = 1$ nicht in $H_0^1(\Omega)$ enthalten.

Wortschatz

1. die Definition, -en
2. die Aufgabe, -n
3. die Bemerkung, -en
4. der Satz, Sätze
5. der Funktionenraum, Räume
6. die Ableitung, -en
7. das Skalarprodukt, -e
8. die Norm, -en
9. die Ungleichung, -en
10. das Gebiet, -e

2. Vorlesung. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben zweiter Ordnung

Einen Zugang für numerische Behandlung der Randwertaufgaben eröffnet der Weg über die Variationsformulierung, der insbesondere zu den Finiten Elementen fuhrt.

Im folgenden sei L ein elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung

$$Lu := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i \left(a_{ik}(x)\partial_k u(x)\right) + a_0(x)u(x) \tag{7}$$

mit $a_0(x) \geq 0$, $x \in \Omega$.

Das gegebene Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad x \in \Omega \\ u &= g \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

transformieren wir zunächst auf ein solches mit homogenen Randbedingungen. Dazu wird vorausgesetzt, dass eine zulässige Funktion u_0 bekannt ist, welche auf dem Rand mit g übereinstimmt. Für $w := u - u_0$ ist dann

$$Lw = f_1 \quad x \in \Omega \tag{8}$$
$$w = 0 \quad x \in \partial\Omega \tag{9}$$

mit $f_1 = f - Lu_0$. Der Einfachheit halber werden wir annehmen, dass homogene Randbedingungen vorliegen.

Eine Funktion, welche eine gegebene Differentialgleichung 2. Ordnung erfüllt und die vorgegebene Randwerte annimmt, wird als **klassische Lösung** bezeichnet, wenn sie bei Dirichlet-Randwerten in $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ bzw. bei Neumann-Randwerten in $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ enthalten sind.

Eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Theorie der partiellen Differentialgleichung ist der Gauß'sche Satz. Wir geben inh hier in einer Formulierung an, die meist *partielle Integration* genannt wird.

Theorem 1.1(Partielle Integration) *Sei $\Omega \subset R^n$ eine offene, beschränkte Teilmenge mit C^1-Rand $\partial\Omega$ und äußere Normalen $\mathbf{n} : \partial\Omega \to R^n$. Für Funktionen $u, v \in C^1(\bar{\Omega}, R)$ gilt dann*

$$\int_\Omega \nabla uv = -\int_\Omega u\nabla v + \int_{\partial\Omega} uv\mathbf{n}. \tag{10}$$

Beide Seiten in Gleichung (10) sind Vektoren im R^n. Die Integrale sind wohldefiniert, da alle Integranden stetig sind aud den Abschluss der Integrationsgebiete, die Integrationsgebiete sind beschränkt. Wir schreiben $u \in C^1(\bar{\Omega}, R)$, wenn u in Ω stetig differenzierbar ist, also $u \in C^1(\Omega, R)$, und wenn zudem diee Funktion ∇u als stetige Funktion auf ganz $\bar{\Omega}$ fortgesetzt werden kann.

Für die i-te Koordinate, $i = 1, \ldots, n$, lautet die Aussage aus (10)

$$\int_\Omega \partial_i wv = -\int_\Omega w\partial_i v + \int_{\partial\Omega} vwn_i.$$

Isbesondere erhalten wir für die konstante Finktion $v = 1$ die Relation

$$\int_\Omega \partial_i w = \int_{\partial\Omega} wn_i.$$

Falls $\mathbf{w} \in C^1(\Omega, R^n)$ vektorwertig ist, so können wir diese Formel auf die Komponenten w_i anwenden und über i summieren. Wir finden

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{w} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}.$$

Dies ist der klassische Gaußsche Satz.

Ehe wir elliptische lineare Probleme als Variationsaufgaben darstellen, bringen wir ein abstraktes Resultat.

Sei V eine gegebene Menge von Funktionen mit der Eigenschaft, dass aus $v_1 \in V, v_2 \in V$ folgt $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \in V$ für reelle β_1, β_2 (man sagt, V ist eine **lineare Menge**). Als Beispiel halten wir uns die Menge der in einem Gebiet Ω stetig differenzierbaren Funktionen vor Augen. Dann heißt $l(v)$ mit $v \in V$ **Linearform** auf V, wenn $l(v)$ reel ist sowie

$$l(\alpha v) = \alpha l(v) \quad \forall \alpha \in R$$

und

$$l(v_1 + v_2) = l(v_1) + l(v_2)$$

gelten.

Wird jeweils zwei Funktionen $u, v \in V$ eine reelle Zahl $a(u, v)$ zugeordnet, so heißt diese Abbildung **Bilinearform** auf V, wenn sie für jedes feste u und für jedes feste v eine Linearform in der anderen Variablen ist. In einer **symmetrischen Bilinearform** kann man u und v vertauschen, sie ist also gekennzeichnet durch $a(u, v) = a(v, u)$.

Wir nennen nun ein Problem der folgenden Form **Variationsgleichung**:

$$\text{Gesucht ist ein } u \in V \text{ , so daß für alle } v \in V \text{ gilt } a(u, v) = l(v).$$

Satz 2.1 (Charakterisierungssatz) Sei V ein linearer Raum und $a : V \times V \to R$ eine symmetrische, positive Bilinearform und $l : V \to R$ ein lineares Funktional (Linearform). Die Größe

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - < l, v >$$

nimmt in V ihr Minimum genau dann bei u wenn Variationsgleichung

$$a(u, v) =< l, v > \quad \forall v \in V$$

gilt. Außerdem gibt es höchstens eine Minimallosung. *Bemerkung:* Die Menge der linearen Funktionale l ist ein linearer Raum. Anstatt $l(v)$ schreibt man häufig lieber $< l, v >$, um die Symmetrie in l und v zum Ausdruck zu bringen.

Als unmittelbare Folgerung des Charakterisierungsatzes ergibt sich der Zusammenhang zwieschen Randwertaufgabe und der Variationsaufgabe.

Satz 2.2 (Minimaleigenschaft) Jede klassische Losung der Randwertaufgabe (8)-(9) ist Lösung des Variationsproblems

$$J(v) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_i v \partial_k v + \frac{1}{2} a_0 v^2 - fv \right] dx \to \min, \tag{11}$$

unter alle Funktionen in $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit Nullrandwerten. Jede Lösung des Variationsproblems, sofern sie in dem Raum $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ liegt, eine klassische Lösung der Randwertaufgabe liefert.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Greenschen Formel.

Wie überführt man ein Randwertproblem in eine Variationsgleichung?

Schritt 1. Multiplizieren die Differenzialgleichung mit einer beliebigen Funktion $v \in V$ und integrieren über Ω.

Schritt 2. Mit Hilfe der Greenschen Formel bekommen die Formen $a(u, v)$ und $l(v)$.

Aufgabe 2.2 Zu der Variationsaufgabe

$$\int_\Omega \left[a_1 (\partial_1 v)^2 + a_2 (\partial_2 v)^2 + a_3 (\partial_1 v - \partial_2 v)^2 - 2fv \right] dx \to \min,$$

mit $a_1, a_2, a_3 > 0$ stelle man die zugehörige Differentialgleichung.

Aufgabe 2.3 Gegeben sei das Minimumproblem für das Funktional $F : V \to R$ über der Menge

$$V = \{v : v \text{ stetig auf } [a,b], v' \text{ stückweise stetig auf } [a,b], v(a) = 0\},$$

wobei F durch

$$F(v) = \int_a^b \left(\frac{1}{2}[v'(x)]^2 - f(x)v(x)\right) dx - Bv(b)$$

gegeben ist. Geben Sie eine äquivalente Formulierung der Aufgabe als Variationsgleichung an! Unter welchen zusätzlichen Bedingungen kann die Variationsgleichung in ein Randwertproblem für eine gewöhnliche Differenzialgleichung überführt werden? Geben Sie das Randwerproblem an!

Bemerkung 2.1 Während für die Charakterisierung von Lösungen in Satz 2.1 nur die lineare Struktur gebraucht wurde, ist für das Existenz von Lösungen die Wahl der richtigen Topologie ausschlaggebend.

Definition. Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt **schwache Lösung** der elliptischen Randwertaufgabe 2. Ordnung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen (8)-(9), wenn die variationelle Gleichungen

$$a(u,v) =< l, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

gelten für Bilinearform $a(u,v)$

$$a(u,v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\partial_k u \partial_i v + a_0 uv\right] dx \tag{12}$$

und LinearForm $l(v)$

$$l(v) = \int_\Omega fv dx. \tag{13}$$

Ohne dies jeweils zu betonen, werden wir auch bei anderen elliptischen Randwertaufgaben eine Funktion als schwache Lösung bezeichnen, wenn sie eine Lösung des zugeordneten Variationsproblems ist.

Wortschatz

1. die Dirichlet (Neumann, gemischte, Null, homogene, inhomogene) Randwerten
2. die Variationsaufgabe, -n
3. die Variationsgleichung, -en
4. das Variationsproblem, -e
5. die Menge, -n
6. die Linearform (Bilinearform), -en
7. die Existenz, -en

3. Vorlesung. Existenz von Lösungen. Das Dirichlet-Problem

Definition. Sei H ein Hilbert-Raum. Eine Linearform $< l, v >: H \to R$ heißt **stetig**, wenn mit einem $C > 0$

$$| < l, v > | \leq C||v|| \quad \forall v \in H$$

gilt. Eine Bilinearform $a : H \times H \to R$ heißt stetig, wenn mit einem $C > 0$

$$|a(u, v)| \leq C||u||||v|| \quad \forall u, v \in H$$

gilt.

Definition. Sei H ein Hilbert-Raum. Eine Bilinearform heißt elliptisch (H-elliptisch), wenn mit einem $\alpha > 0$

$$a(v, v) \geq \alpha||v||^2 \quad \forall v \in H$$

gilt.

Mit jeder stetigen und elliptischen Bilinearform wird durch

$$||v||_a := \sqrt{a(v, v)}$$

eine Norm induziert. Diese Norm wird **Energienorm** genannt. Enegienorm ist zur Norm des Hilbert-Raum H äquivalent

$$\sqrt{\alpha}||v|| \leq ||v||_a \leq \sqrt{C}||v||.$$

Satz 3.1 von Lax-Milgram. Sei V eine abgeschlossene, konvexe Menge in einem Hilbert Raum H und $a : H \times H \to R$ eine stetige elliptische Bilinearform. Für jedes $\forall l \in H'$ (H' bezeichnet der Raum der stetigen, linearen Funktionale auf einem normierten Raum H) hat das Variationsproblem

$$\frac{1}{2}a(v, v) - < l, v > \to \min$$

genau eine Lösung in V.

Bemerkung 3.1 In den Spezialfall $V = H$ liefert der Satz die folgende Aussage: Zu jedem $l \in H'$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $u \in H$ mit

$$a(u, v) = < l, v > \quad \forall v \in H.$$

Die weitere Spezialisierung auf $a(u, v) := (u, v)_0$ liefert den Rieszschen Darstellung: Zu jedem $l \in H'$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $u \in H$ mit

$$(u, v)_0 = < l, v > \quad \forall v \in H.$$

Die so definierte Abbildung $H' \to H, l \longmapsto u$ bezeichnet man als kanonische Einbettung von H' in H.

Satz 3.2. Existenzsatz Sei $V = H_0^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ und Bilinearform (12) **gleichm ässig elliptisch**

$$a(u, v) := \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_k u \partial_i v + a_0 uv \right] dx, \quad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_k v \partial_i v \geq \alpha \sum_i (\partial_i v)^2 .$$

Dann hat das Dirichlet-Problem (8)-(9) stets eine schwache Lösung in $H_0^1(\Omega)$.

Bisher wurden stets homogene Dirichletsche Randbedingungen betrachtet. Wir kehren zur Gleichung mit inhomogenen Randbedingungen $u = g$ für $x \in \partial\Omega$ zurück. Sei u_0 eine Funktion, welche auf dem Rand von Ω mit g übereinstimmt. Setzt man dann $w := u - u_0$, so genügt w einem Problem mit $w = 0$ für $x \in \partial\Omega$. Die schwache Formulierung lautet dann

Gesucht wird $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$a(u,v) =< l, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$$

für Bilinearform (12) und Linearform

$$l(v) = \int_\Omega f v dx - a(u_0, v).$$

Da Linearform ist stetig auf $H_0^1(\Omega)$, bleibt der Satz von Lax-Milgram anwendbar. Die Relation $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ kann als schwache Formulierung der Randbedingung aufgefasst werden. Aus Dichtheitsgründen braucht nur $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ vorausgesetzt zu werden.

Aufgabe 3.1 Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x) \quad x \in \Omega = (0,1) \\ u &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $p(x) \in C^1(\Omega), p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \in C(\Omega), q(x) \geq 0, f(x) \in C^2(\Omega)$. Leiten Sie die schwache Formulierung des Problems und zeigen, dass die Randwertaufgabe eine eindeutige schwache Lösung in $H_0^1(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 3.2 Auf dem Interval [0,1] betrachte man elliptische, aber nicht gleichmässig elliptische Bilinearform $a : H_0^1 \times H_0^1 \to R$

$$a(u,v) := \int_0^1 x^2 u' v' dx.$$

Man zeige, dass die Aufgabe

$$\frac{1}{2} a(v,v) - \int_0^1 v dx \to \min!$$

keine Lösung in H_0^1 besitzt ($|u|_1 \to \infty$). Wie lautet die zugehörige Differentialgleichung.

Wortschatz

1. stetig
2. die Energienorm, -en
3. eindeutig
4. die Abbildung, -en
5. gleichmässig
6. übereinstimmen
7. auffassen
8. voraussetzen

4. Vorlesung. Existenz von Lösungen. Das Neumann-Problem

Es wird jetzt gefordert, dass $a_0(x)$ positiv und nach unten durch eine positive Zahl beschränkt ist $a_0(x) \geq \beta > 0$ im elliptischen Differentialoperator 2. Ordnung (7)

$$Lu := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i \left(a_{ik}(x) \partial_k u(x) \right) + a_0(x) u(x).$$

Das gegebene Neumannsche Problem ist

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad x \in \Omega \qquad (14) \\ \sum_{i,k} n_i a_{ik} \partial_k u &= g \quad x \in \partial\Omega, \qquad (15) \end{aligned}$$

für die klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

Satz 4.1

Eine klassische Lösung der Randwertaufgabe (14)-(15) ist auch eine Lösung für das Problem

$$J(v) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_i v \partial_k v + \frac{1}{2} a_0 v^2 - fv \right] dx - \int_{\partial\Omega} gv ds \to \min, \qquad (16)$$

für $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Die beiden Lösungen sind dann identisch.

Sei $V = H^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\partial\Omega)$ und Bilinearform ist gleichmäßig elliptisch

$$a(u,v) := \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_k u \partial_i v + a_0 uv \right] dx, \quad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_k v \partial_i v \geq \alpha \sum_i \left(\partial_i v \right)^2,$$

für $a_0(x) \geq \beta > 0$. Dann hat die Randwertaufgabe (14)-(15) genau eine schwache Lösung in $H^1(\Omega)$.

Bemerkung 4.1 Dirichlet-Randbedingungen wurden beim Übergang von der Differentialgleichung zur Variationsaufgabe explizit übernommen und in den Funktionenraum eingebaut. Man spricht deshalb von einer wesentlichen Randbedingung. Im Gegensatz dazu ergeben sich Neumannsche Randbedingungen, das sind Bedingungen an Ableitungen auf dem Rand, ohne dass man explizit fordert. Man spricht deshalb von natürlichen Randbedingungen.

Beispiel 4.1 Die Poisson-Gleichung mit Neumannschen Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad x \in \Omega \\ \sum_i n_i \partial_i u &= g \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

legt eine Funktion offensichtlich nur bis auf eine additive Konstante fest. Die Bilinearform

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \quad a(v,v) = |v|_1^2$$

ist nicht elliptisch in $H^1(\Omega)$. Dies legt die Einschränkung auf den Unterraum $V := \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v dx = 0\}$. Dann, wegen der Variante der Friedrichsschen Ungleichung

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad ||v||_0 \leq c(\Omega)(|\bar{v}|_1 + |v|_1), \quad \bar{v} = \int_\Omega v(x) dx / \mu(\Omega),$$

ist die Bilinearform elliptisch in V und hat eine eindeutige schwache Lösung in V.

Zu beachten ist allerdings eine Kompatibilitätsforderung an die gegebene Funktionen f und g.

$$\int_\Omega f dx + \int_{\partial\Omega} g ds = 0.$$

Jede klassische Lösung genügt der Poisson-Gleichung mit Neumannschen Randbedingungen wenn eine Kompatibilitätsforderung gilt.

Aufgabe 4.1 Das Gebiet Ω sei durch eine stückweise glatte Kurve Γ in zwei Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 aufgeteilt. Es sei $a(x) = k_i > 0$ für $x \in \Omega_i$, $i = 1, 2$. Man zeige, dass für jede klassische Lösung der Variationsaufgabe in $H_0^1(\Omega)$:

$$J(v) := \int_\Omega a(x)\nabla v \cdot \nabla v dx \to \min!$$

auf der Kurve Γ die Größe $a(x)\partial u/\partial n$ stetig ist.

Wortschatz

1. die Zahl, -en
2. beschränkt
3. wesentliche, natürliche Randbedinung
4. festlegen
5. die Einschränkung, -en
6. der Unterraum, Räume
7. die Kompatibilitätsforderung, -en
8. aufteilen

5. Vorlesung. Ritz-Galerkin Verfahren

Für die numerische Lösung von elliptischen Randwertaufgaben bietet sich ein natürliches Vorgehen an. Für das Funktional J der zuordneten Variationsaufgabe bestimmt man das Minimum nicht in $V = H^m(\Omega)$, sondern nur in einem passenden endlich-dimensionalen Unterraum [Ritz 1908]. Üblicherweise bezeichnet man den Unterraum mit $V_h \subset V$. Dabei steht h für einen Diskretisierungsparameter, und die Bezeichnung weist darauf hin, dass mit $h \to 0$ Konvergenz gegen die Lösung des gegebenen (kontinuierlichen) Problems erreicht werden soll.

Die Lösung $u_h \in V_h$ der Variationsaufgabe in V_h

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - < l, v > \to \min!$$

ist auch die Lösung der Variationsgleichungen

$$a(u_h, v) =< l, v > \quad \forall v \in V_h, \tag{17}$$

wenn die Bilinearform $a(u,v)$ symmetrisch und positiv und die Form $< l, v >$ linear sind. Wir nennen (17) das **diskrete Problem**.

N Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_N$ heißen **linear unabhängig**, wenn jede der Funktionen, etwa ψ_i, nicht durch die anderen Funktionen dargestellt werden kann als

$$\psi_i = z_1^i \psi_1 + \cdots + z_{i-1}^i \psi_{i-1} + z_{i+1}^i \psi_{i+1} + \cdots z_N^i \psi_N$$

mit Konstanten $z_1^i, \ldots, z_N^i$, $i = 1, \ldots, N$. Man sagt, ψ_i ist nicht Linearkombination von $\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}$, $\psi_{i+1}, \ldots, \psi_N$.

Es seien N linear unabhängige Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_N$ aus V gegeben und V_h sei die Menge aller Linearkombinationen

$$\sum_{j=1}^{N} z_j \psi_j \quad (z_j \text{ Konstanten}).$$

Man bezeichnet V_h als einen **N-dimensionalen Teilraum** von V. Die ψ_j heißen Basisfunktionen von V_h.

Wenn die Variationsgleichungen (17) für alle $v_h \in V_h$ gilt, so gilt speziell auch für die Basisfunktionen

$$a(u_h, \psi_i) =< l, \psi_i > \quad i = \overline{1, N}.$$

Der Ansatz

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} z_j \psi_j$$

führt zu dem Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{N} a(\psi_j, \psi_i) z_j =< l, \psi_i > \quad i = \overline{1, N},$$

das wir in Matrix-Vektor-Form schreiben

$$Az = b$$

mit Koeffizientenmatrix $A_{ij} := a(\psi_j, \psi_i)$ und $b_i :=< l, \psi_i >$. Dies ist ein Gleichungssystem mit N Gleichungen für die N Unbekannten z_j. Der diskreten Aufgabe entspricht also ein Gleichungssystem.

Man löst die diskrete Aufgabe, indem man aus den Basisfunktionen ψ_j die Größen A_{ij} and b_i berechnet, dann die z_j aus dem Gleichungssystem ermittelt, letztlich ist

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} z_j \psi_j.$$

Bemerkung 5.1 In den Ingenieurwissenschaften, insbesondere wenn das Problem aus der Kontinuumsmechanik kommt, bezeichnet man die Matrix A als Steifigkeitsmatrix oder als Systemmatrix.

Wenn $a(u, v)$ eine elliptische Bilinearform ist, dann ist die Matrix A positiv definit

$$\begin{aligned} z'Az &= \sum_{i,j=1}^{N} z_i A_{ij} z_j = \sum_{i,j=1}^{N} z_i a(\psi_j, \psi_i) z_j = \sum_{i,j=1}^{N} a(z_j\psi_j, z_i\psi_i) \\ &= a\left(\sum_{j=1}^{N} z_j\psi_j, \sum_{i=1}^{N} z_i\psi_i\right) = a(u_h, u_h) \geq \alpha ||u_h||^2. \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Lax und Milgram besitzen das stetige und das diskrete Problem also eine eindeutige Lösung. Hier zeigt sich ein bemerkenswerter Vorzug der Methode der finiten Elemente gegenüber anderen Diskretisierungskonzepten (z.B. Differenzenverfahren): Eigenschaften des stetigen Problems übertragen sich automatisch auf das diskrete Problem!

Entscheidend für die praktische Realisierbarkeit des Verfahrens ist die Wahl der Basisfunktionen.

Wenn die Näherung u_h von u gut sein soll, muss oft die Anzahl N der Basisfunktionen großsein. Man hat dann ein Gleichungssystem mit relativ vielen Unbekannten zu lösen. Daher ist es wünschenswert, dass die Matrix A möglichst viele Nullelemente enthält. Am güntigsten wäre, wenn die Matrix A die Einheitsmatrix ist. Dies lässt sich aber praktisch nicht realisieren, weil es schwierig ist, die Basisfunktionen so zu wählen, dass die Einheitsmarix entsteht. Nun ist A_{ij} im allgemeinen ein Integral über das Gebiet Ω von Summen von Produkten von ψ_i und ψ_j und deren Ableitungen. Wählt man die Basisfunktion ψ_i nun so, dass sue nur in einem kleinen Teilgebiet Ω_i von Ω von Null verschieden ist und sonst identisch Null, so werden z.B. Produkte $\psi_i\psi_j$ nur für einige i und j von Null verschieden sein

$$\begin{aligned} A_{ij} &= a(\psi_j, \psi_i) = \int_\Omega \sum_{l,k} a_{lk} \partial_l\psi_j \partial_k\psi_i = \sum_{l,k} \int_\Omega a_{lk} \partial_l\psi_j \partial_k\psi_i \\ &= \sum_{l,k} \int_{\text{supp } \psi_i \cap \text{supp } \psi_j} a_{lk} \partial_l\psi_j \partial_k\psi_i = \sum_{l,k} \int_{\bigcup_{\xi_i,\xi_j \in K} K} a_{lk} \partial_l\psi_j \partial_k\psi_i. \end{aligned}$$

Wortschatz

1. der endlich-dimensionale Unterraum, N-dimensinale Teilraum, Räume
2. der Diskretisierungsparameter, -
3. die Konvergenz, -en
4. das kontinuierliche (diskrete) Problem, -e
5. linear unabhängig
6. die Linearkombination, -en
7. die Basisfunktion, -en

8. der Ansatz, Ansätze
9. das Gleichungssystem, -e
10. die Koeffizientenmatrix, Steifigkeitsmatrix, Systemmatrix, Matrizen

6. Vorlesung. Einfache Finite Elemente für die Poisson-Gleichung im Einheitsquadrat

Zu lösen sei die Poisson-Gleichung im Einheitsquadrat

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad x \in \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Variationsaufgabe lautet: Gesucht wird $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$a(u,v) =< l, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$u - g \in H_0^1(\Omega),$$

für $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy$, $< l, v >= \int_\Omega f v dxdy - a(g,v)$.

Zur Konstruktion geeigneter Basisfunktionen zerlegen wir das Quadrat zunächst in Teilquadrate durch $x_i = (i-1)h, y_j = (j-1)h, \quad i,j = 1,\ldots,M+1; \quad h = 1/M$, jedes Quadrat in zwei Teildreiecke. V_h sei der $(M+1)^2 = N-$dimensionale Raum, der dadurch gekennzeichnet ist, dass jede Funktion in jedem Dreieck eine lineare Funktion in x und y ist.

Abbildung 1: Konstruktion des Dreiecknetzes.

Basisfunktionen in V_h sind Funktionen mit der Eigenschaft

$$\psi_k(x_l, y_l) = \delta_{lk} \quad k,l = 1,\ldots,N.$$

Die Matrixelemente berechnet man folgenderweise

$$A_{kl} = a(\psi_l, \psi_k) = \int_\Omega \nabla\psi_l \cdot \nabla\psi_k dxdy = \int_\Omega \partial_x\psi_k\partial_x\psi_l + \partial_y\psi_k\partial_y\psi_l dxdy \tag{18}$$

$$= \int\limits_{\bigcup\limits_{\xi_k,\xi_l \in K} K} \partial_x\psi_k\partial_x\psi_l + \partial_y\psi_k\partial_y\psi_l dxdy. \tag{19}$$

Für jeder Gitterpunkt (x_k, y_k) bestimmt man eine lokale Nummerierung der Elemente in der Umgebung des Punktes (x_k, y_k) (Zentrum z) und der Nachbarpunkte in den Himmelsrichtungen $A_{zz} := A_{k,k}, A_{zn} := A_{k,k+1}, A_{zs} := A_{k,k-1}, A_{zw} := A_{k,k-M-1}, A_{zo} := A_{k,k+M+1}, A_{znw} := A_{k,k+1-M-1}, A_{zso} := A_{k,k-1+M+1}$. Jede Zeile der Matrix hat nur 7 Elementen, die nicht Null sind.

Abbildung 2: Nummerierung der Elemente in der Umgebung des Zentrum z.

Die folgende Tabelle zeigt Ableitungen der Basisfunktion $\partial_x\psi_z, \partial_y\psi_z$ in der Dreiecken.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$\partial_x\psi_z$	$-1/h$	0	$1/h$	0	0	$1/h$	0	$-1/h$
$\partial_y\psi_z$	$-1/h$	0	0	$-1/h$	0	$1/h$	$1/h$	0

Wir berechnen die Matrixelemente, wobei wir lokale Indizes wählen

$$A_{zn} = \int\limits_{I+IV} \partial_x\psi_z\partial_x\psi_n + \partial_y\psi_z\partial_y\psi_n dxdy = \int\limits_{I+IV} -\frac{1}{h^2} dxdy = -1.$$

Aus Symmetriegründen folgt genauso $A_{zs} = -1, A_{zw} = -1, A_{zo} = -1$.

$$A_{znw} = \int\limits_{III+IV} \partial_x\psi_z\partial_x\psi_n + \partial_y\psi_z\partial_y\psi_n dxdy = 0.$$

Bei der Auswertung von A_{zso} verschwinden ebenso alle Produkte in den Integralen und $A_{zso} = 0$.

Schließlich berechnen wir

$$\begin{aligned} A_{zz} &= \int\limits_{I...VIII} (\partial_x\psi_z)^2 + (\partial_y\psi_z)^2 dxdy \quad \overset{\int_I=\int_{VI},\int_{IV}=\int_{VII},\int_{III}=\int_{VIII}}{\rightarrow} \\ &= 2\int\limits_{I+III+IV} (\partial_x\psi_z)^2 + (\partial_y\psi_z)^2 dxdy = 2\int\limits_{I+III} (\partial_x\psi_z)^2 dxdy + 2\int\limits_{I+IV} (\partial_y\psi_z)^2 dxdy = 4. \end{aligned}$$

Es entsteht also ein Gleichungssystem mit dem 5-Punkte-Stern

$$\begin{array}{ccc} & \text{-1} & \\ \text{-1} & 4 & \text{-1} \\ & \text{-1} & \end{array}$$

Die Gleichungen an innere Knoten für das homogene Dirichlet-Problem ($< l, v >= \int_\Omega fvdxdy$)

$$4u_z - u_n - u_s - u_w - u_o = \int\limits_{I...VIII} f\psi_z dxdy = h^2 f(x_z, y_z)$$

sind für Unbekannten u_z, u_n, u_s, u_w, u_o.

Aufgabe 6.1 Seien auf der unten liegenden Seite des Quadrats die Dirichlet-Randbedingungen durch die natürlichen Randbedingungen $\partial u/\partial n = 0$ ersetzt. Man verifiziere, dass sich in diesen Randpunkten der Differenzenstern

$$\begin{array}{ccc} & \text{-1} & \\ \text{-1/2} & 2 & \text{-1/2} \end{array}$$

einstellt.

Wortschatz

1. das Einheitsquadrat, -e
2. zerlegen
3. die Eigenschaft, -en
4. das Matrixelement, -e
5. der Gitterpunkt, Randpunkt, -e
6. die Zeile, -n
7. die Auswertung, -en
8. verschwinden
9. die Knote, -n
10. ersetzen

7. Vorlesung. Finite-Element-Räume

In der Praxis löst man die Variationsprobleme in Räumen, für die sich die Bezeichnung Finite-Element-Räume eingebürgert hat. Man zerlegt das gegebene Gebiet Ω in Teilgebiete und betrachtet Funktionen, die auf jedem Teilgebiet Polynome sind. Die Teilgebiete werden als Elemente bezeichnet.

Der Einfachheit halber sei Ω im folgenden ein polygonales Gebiet, so dass es in Dreiecke oder Vierecke zerlegt werden kann.

Die wichtigsten Merkmale der Finite-Element-Räume sind die folgenden Spezifikationen:

1. Art der Zerlegung des Gebietes Ω in Dreieck- bzw. Viereckelemente. Eine Zerlegung T_h heißt zulässig, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M} T_i$;
- Besteht $T_i \cap T_j$ genau aus einem Punkt, so ist dieser Eckpunkt sowohl von T_i als auch von T_j;
- Besteht $T_i \cap T_j, i \neq j$ aus mehr als einem Punkt, so ist $T_i \cap T_j$ eine Kante sowohl von T_i als auch von T_j;

2. Funktion $u \in V_h$ ist ein Polynom vom Grad $\leq t$

$$u|_T \in P_t := \{p(x,y) = \sum_{i+k \leq t, i,k \geq 0} c_{ik} x^i y^k\}$$

oder

$$u|_T \in Q_t := \{q(x,y) = \sum_{i,k \leq t, i,k \geq 0} c_{ik} x^i y^k\}.$$

Diese Eigenschaft hat lokalen Charakter.

3. Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften: $V_h \subset V = H^m(\Omega)$, wenn $V_h \subset C^{m-1}(\bar{\Omega})$. Diese Eigenschaft hat globalen Charakter. C^0-Finite-Element-Raum braucht man für Behandlung elliptischer Problemen 2. Ordnung und C^1-Finite-Element-Raum für Problemen 4. Ordnung.

Außerdem spricht man von **konformen Finiten Elementen**, wenn die Funktionen in dem Sobolev-Raum enthalten sind, in dem das Variationsproblem gestellt ist.

Wir bemerken, dass lineare Dreieckelemente aus $C^0(\Omega)$ in der letzten Vorlesung man auch als Courant-Elemente nennt.

Andere Beispiele Finite-Element-Räumen:

- Raum quadratischen Dreieckelementen aus $C^0(\Omega)$,
- Raum kubischen Dreieckelementen aus $C^0(\Omega)$,
- Raum Dreieckelementen von Argyris aus $C^1(\Omega)$, $u|_T \in P_5$,
- Raum Dreieckelementen von Bell aus $C^1(\Omega)$, $u|_T \in P_5$,
- Raum bilinearen Viereckelementen aus $C^0(\Omega)$.

Definition (Ciarlet, 1978). **Ein Finites Element** ist ein Tripel (T, Π, Σ) mit folgenden Eigenschaften:

T ist ein Polyeder im R^d,

Π ist ein Unterraum von $C(T)$ mit endlicher Dimension s. Die Funktionen in Π heißen **Formfunktionen**.

Σ ist eine Menge von s linear unabhängigen Funktioalnen $l_i(p)$ über Π. Jedes $\forall p \in \Pi$ ist durch die Werte des s Funktionale aus Σ eindeutig bestimmt. Σ heißt **Menge der Freiheitsgrade**.

Man findet für lineare Dreieckelemente aus $C^0(\Omega)$ auch die Bezeichnung P_1-Elemente.

Beispiel 7.1 Sei T ein Dreieck und der Raum $\Pi = P_1$ besteht aus Polynomen ersten Grades auf den Dreieck ($s = 3$), Σ Menge von Werten eines Polynoms aus Π in Punkten des Dreiecks $l_i(p) = p(a_i), \quad i = \overline{1,s}$. Man kann verschiedene P_1-Elemente konstruieren.

In jedem Dreieck sind Polynome vom Grad ≤ 1 eindeutig durch die Vorgabe von Werten an den Eckpunkten bestimmt. Außerdem ist die Restriktion auf jede Kante ein Polynom in einer Variablen, das einen Grad ≤ 1 aufweist. Da die Werte in den Knoten auf der Kante von den Polynomen auf

den beiden Seiten interpoliert werden, stimmen die Grenzwerte der betreffenden Polynome von beiden Seiten überein, und die Funktionen sind global stetig.

In jedem Dreieck sind Polynome vom Grad ≤ 1 eindeutig durch die Vorgabe von Werten in den Seitenmitten bestimmt (Crouzeix-Raviart-Element, nichtkonformes P_1-Element). Entlang jeder Seite des Dreiecks ist p ein Polynom ersten Grades in einer Veränderlichen, das nur in einem Punkt, der Seitenmitte, fest vorgeschrieben ist. Betrachtet man daher v_h auf zwei aneinandergrenzenden Dreiecken T und T', so stimmen entlang der gemeinsamen Seite i. allg. nur in der Seitenmitte überein. Damit ist v_h i. allg. unstetig und V_h nicht in V enthalten.

Beispiel 7.2 Sei T ein Dreieck und der Raum $\Pi = P_2$ besteht aus Polynomen zweiten Grades auf den Dreieck ($s = 6$), Σ Menge von sechs Werten eines Polynoms aus Π in Eckpunkten und Seitenmitten des Dreiecks $l_i(p) = p(a_i), i = \overline{1,3}, \quad l_4(p) = p(a_{12}), l_5(p) = p(a_{13})), l_6(p) = p(a_{23}))$.

Die Restriktion von eine Funktion p aus Π auf eine Kante ist ein Polynom in einer Variablen vom Grad zwei, das drei Knoten interpoliert und damit eindeutig ist. Die Restriktion der Ansatzfunktion im Nachbarelement führt auf denselben Interpolanten und damit ist der globale Funktion über Elementgrenzen hinweg stetig.

Bemerkung 7.1 Zu einem Finite-Element-Raum sei eine Menge von Punkten bekannt, derart, dass die Funktionen durch die Werte an den Punkten bestimmt sind. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Lagrange-Elementen**. Freiheitsgrade können auch durch Vorgabe von Ableitungen und Integralen festgelegt werden. Wenn Ableitungen als Freiheitsgraden benutzt wird, spricht man dann über **Hermite-Elementen**. Dreieckelementen von Argyris und von Bell sind Beispele von Hermite-Elementen.

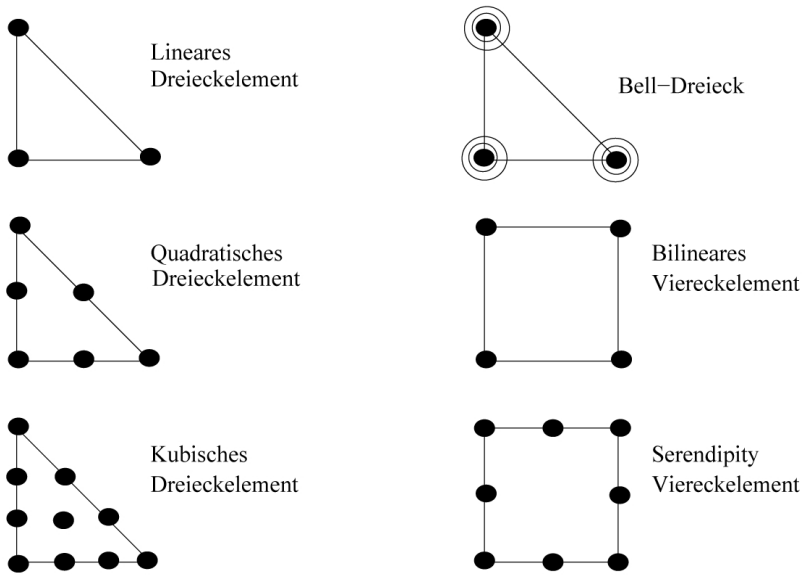

Abbildung 3: Finite Elemente.

Formfunktionen

Sei T ein Dreieck mit Eckpunkte $a_i = (x_i, y_i)$ und die Menge der Freiheitsgrade von $p \in \Pi$ sind durch die Vorgabe von Werten in allen Ecken der Dreiecke bestimmt $\Sigma = \{p(a_i), \overline{1,3}\}$ bestimmt. Das finite Element heißt $P1$-Element oder Courantsches Element. Jede Funktion in Π kann man mit Hilfe der

Basisfunktionen $L_i(x,y)$ vorstellen

$$\forall p \in \Pi \quad p(x,y) = p(a_1)L_1(x,y) + p(a_2)L_2(x,y) + p(a_3)L_3(x,y).$$

Für gegebenes $z = (x,y)$ sind $L_i(x,y)$ die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(x,y) \\ L_2(x,y) \\ L_3(x,y) \end{pmatrix}.$$

Nach der Cramerschen Regel ist

$$L_1(x,y) = \frac{0.5S(\Delta z a_2 a_3)}{0.5S(T)}, \quad L_2(x,y) = \frac{S(\Delta a_1 z a_3)}{S(T)}, \quad L_3(x,y) = \frac{S(\Delta a_1 a_2 z)}{S(T)}.$$

L_i sind also lineare Funktionen in x und y und $L_i(a_j) = \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol bezeichnet.

Aus geometrischen Interpretation folgt, dass Basisfunktionen auf dem Dreieck auch **baryzentrische Koordinaten** sind

$$T = \{z \,:\, a_1\lambda_1(x,y) + a_2\lambda_2(x,y) + a_3\lambda_3(x,y) : 0 \le \lambda_i \le 1, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\},$$

mit $\lambda_i = L_i$.

- Die Eckpunkte a_1, a_2, a_3 haben folglich die Dreieckskoordinaten (1,0,0), (0,1,0) und (0,0,1);
- Jeder Punkt auf der Geraden durch a_2 und a_3 hat die Koordinate $\lambda_1 = 0$;
- (1/3,1/3,1/3) gilt für den Schwerpunkt des Dreiecks.

Durch Zusammensetzen der zunächst zellweise definierten Formfunktionen $v_T \in P(T)$ erhält man global definierte Funktionen

$$v_h : \bar{\Omega} \to R, \quad v_h|_T := v_T, \quad T \in T_h,$$

mit denen der Finite-Elemente-Ansatzraum V_h gebildet wird. Durch Gleichsetzen geeigneter Knotenwerte auf dem gemeinsamen Rand $\Gamma = T \cap T'$ jeweils benachbarter Zellen wird Stetigkeit, Differenzierbarkeit und auf analogem Wege auch die Randbedingung $v_h|_{\partial\Omega} = 0$ implementiert. Die Dimension des endlich dimensionalen Teilraumes $V_h \subset V$ ist dann gleich der Anzahl der Knotenfunktionalwerte zur eindeutigen Festlegung einer Funktion $v_h \in V_h$.

Referenzelement

Definition von einem Finiten Element bezieht sich auf ein einzelnes Element. Wenn alle Elemente aus einem einzigen, dem sogenannten **Referenzelement**, ableitbar sind, vereinfacht sich die Analyse erheblich.

Aufgabe 7.1 Bilden Sie die Basisfunktionen für ein konformes P_1-Element auf dem Referenzelement $\hat{T}$ mit Ecken (0,0), (0,1) (1,0).

Aufgabe 7.2 Bilden Sie die Basisfunktionen für ein P_2-Element mit Freiheitsgraden $\Sigma = \{p(a_i), i = 1,3, p(a_{12}), p(a_{13}), p(a_{23})\}$, a_i - Ecken, $a_{ij} = (a_i + a_j)/2$. Z.B., die Gleichung der Geraden durch a_2 und a_3 ist $\lambda_1 = 0$, die Gleichung der Geraden durch a_{13} und a_{12} ist $\lambda_1 - 0.5 = 0$. Deswegen ist $\lambda_1(\lambda_1 - 0.5)$ ein Polynom zweiten Grades mit der Eigenschaft, dass $\lambda_1(\lambda_1 - 0.5)$ in a_2, a_3, a_{23} und a_{13} verschwindet, also ist $\lambda_1(2\lambda_1 - 1)$ eine Basisfunktion.

Wortschatz

1. das finite Element, Dreieckelement, Viereckelement, Lagrange-Element, Hermite-Element, Referenzelement, -e
2. zulässig
3. der Eckpunkt, -e
4. die Kante, -n
5. der Grad, Freiheitsgrad, -e
6. die Formfunktion, -en
7. die Seitenmitte, -n
8. die Veränderliche, -n
9. die baryzentrische Koordinate, Dreieckskoordinate, -n
10. die Gerade, -n

8. Vorlesung. Der Aufbau des Gleichungssystems

Die Systemmatrix A berechnet man üblicherweise nicht, indem man zu vorgegebenen Knotenindizes i, j die wesentlichen Dreiecke heraussucht. Eine solche Knoten-orientierte Vorgehensweise wurde zwar beim Modellproblem in der 6. Vorlesung gewählt, würde aber in der Praxis unnötig viel Rechenzeit für wiederholte Umrechnungen verschlingen. Als vorteilhafter hat sich eine Element-orientierte Berechnung erwiesen.

Zu lösen sei die Poisson-Gleichung im Einheitsquadrat

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad x \in \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Variationsaufgabe lautet: Gesucht wird $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$a(u,v) =< l, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$u - g \in H_0^1(\Omega),$$

für $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy$, $< l, v >= \int_\Omega f v dxdy - a(g,v)$.

Dieser Fall ist praktisch wichtig, da er der Diskretisierung der Laplace Operators entspricht. Andere Bilinearformen behandelt man auf ähnliche Art und Weise.

Für Approximation nehmen wir P_1-Elemente.

Koeffizienten der Systemmatrix berechnet man als

$$A_{ij} = a(\psi_j, \psi_i) = \int_\Omega \nabla\psi_j \cdot \nabla\psi_i dxdy = \sum_{T_m \in T_h, a_i, a_j \in T_m} \int_{T_m} \nabla\psi_j \cdot \nabla\psi_i dxdy = \sum_{T_m \in T_h, a_i, a_j \in T_m} A_{ij}^{(m)}.$$

Wir betrachten ein Dreieck T_m mit Eckpunkten a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}. Dann

$$A_{ij}^{(m)} \neq 0 \quad \text{nur für } i,j \in \{r_1, r_2, r_3\},$$

gilt. Die Matrix $A^{(m)} \in R^{3,3}$ heißt Elementmatrix.

Der entscheidende Vorteil ist, daßman zur Berechnung der Matrizen $A_{r_i r_j}^{(m)}$ nicht die globalen Basisfunktionen benötigt, sondern nur die lokalen Basisfunktionen. Zur Berechnung ist es güntig, die auftretenden Integrale über Referenzelementen zu transformieren.

$$\begin{aligned} A_{r_i r_j}^{(m)} &= \int_{T_m} \nabla_\xi \psi_{r_j} \cdot \nabla_\xi \psi_{r_i} dxdy \overset{\text{lokale Numerierung}}{\rightarrow} \\ &= \int_{T_m} \nabla_\xi L_j \cdot \nabla_\xi L_i dxdy \overset{\text{Tranformation auf das Referenzdreieck}}{\rightarrow} \quad {\scriptstyle F:\hat{T}\to T, F(\hat{\xi}) = B\hat{\xi}+d, dxdy = |detB| d\hat{x}d\hat{y}} \\ &= \int_{\hat{T}} \nabla_\xi L_j(F(\hat{\xi})) \cdot \nabla_\xi L_i(F(\hat{\xi})) \, |det(B)| \, d\hat{x}d\hat{y} \overset{L_j(F(\hat{\xi}))=\hat{L}_j(\hat{\xi})}{\rightarrow} \\ &= |det(B)| \int_{\hat{T}} \nabla_\xi \hat{L}_j(\hat{\xi}) \cdot \nabla_\xi \hat{L}_i(\hat{\xi}) d\hat{x}d\hat{y} \overset{\nabla_\xi = B^{-T}\nabla_{\hat{\xi}}, B^{-T} = (B^T)^{-1}}{\rightarrow} \\ &= |det(B)| \int_{\hat{T}} B^{-T}\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi}) \cdot B^{-T}\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi}) d\hat{x}d\hat{y}. \end{aligned}$$

Für lineare Approximation ist Gradient von Basisfunktionen konstant und man kann Integrale exakt berechnen

$$\begin{aligned} A_{r_i r_j}^{(m)} &= 0.5 \, |det(B)| \, B^{-T}\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi}) \cdot B^{-T}\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi}) \\ &= S(T_m) \left(B^{-1}B^{-T}\right) \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi}) \cdot \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi}) \\ &= C\nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_j(\hat{\xi}) \cdot \nabla_{\hat{\xi}} \hat{L}_i(\hat{\xi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= S(T_m)\left(B^T B\right)^{-1} = S(T_m)\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\right)^{-1} = S(T_m)\begin{pmatrix} b_1 \cdot b_1 & b_1 \cdot b_2 \\ b_1 \cdot b_2 & b_2 \cdot b_2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{S(T_m)}{det(B)^2}\begin{pmatrix} b_2 \cdot b_2 & -b_1 \cdot b_2 \\ -b_1 \cdot b_2 & b_1 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4S(T_m)}\begin{pmatrix} b_2 \cdot b_2 & -b_1 \cdot b_2 \\ -b_1 \cdot b_2 & b_1 \cdot b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $b_1 = a_3 - a_1$, $b_2 = a_2 - a_1$.

Dann ist der Beitrag von T_m durch

$$A^{(m)} = \begin{pmatrix} A_{r_1r_1} & A_{r_1r_2} & A_{r_1r_3} \\ A_{r_2r_1} & A_{r_2r_2} & A_{r_2r_3} \\ A_{r_3r_1} & A_{r_3r_2} & A_{r_3r_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ C\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ C\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

gegeben.

Für jedes Element T_m wird der additive Beitrag $A^{(m)}$ zur Steifigkeitsmatrix ermittelt. Sei $T_m = conv\{a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}\} = conv\{a_1, a_2, a_3\}$, dann

$$A_{r_i r_j} = A_{r_i r_j} + A_{ij}^{(m)}, \quad i, j = 1, \ldots 3$$

gilt. Wenn jedes Element gerade s Knoten enthält, hat man eine $s \times s$-Untermatrix zu berechnen.

Bei Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten erfolgt die Auswertung der Integrale meistens mittels Gaußschen Quadraturformeln für mehrfache Integrale. Bei Gleichungen mit konstanten Koeffizienten stoßt man in der Regel auf Integrale über Polynome, die man mittels der Formel für das Einheitsdreieck in geschlossener Form angeben kann

$$\int_{\hat{T}} \hat{x}^p \hat{y}^q (1 - \hat{x} - \hat{y})^r d\hat{x}\hat{y} = \frac{p!q!r!}{(p + q + r + 2)!}.$$

Die Formel übertragt man auf Dreiecke in beliebiger Lage, indem man $\hat{x}, \hat{y}, (1 - \hat{x} - \hat{y})$ durch die baryzentrischen Koordinaten ersetzt. Man beachte, dass die Integranden für lineare Elemente sogar konstant sind.

Wortschatz

1. die Vorgehensweise, -n
2. die Rechenzeit, -en
3. die Berechnung, -en
4. entsprechen
5. behandeln
6. die Elementmatrix, Matrizen
7. der Beitrag, -Beiträge
8. ermitteln
9. die Auswertung, -en
10. die Lage, -n

9. Lektion. Der Aufbau des Gleichungssystems II

Literatur

[1] Bangerth, W. und Rannacher, R. (2003): Adaptive finite element methods for differential equations. Basel, Birkhäuser.

[2] Braess, D. (2003): Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer.

[3] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994,2008): The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer.

[4] Ciarlet, P.G. (1978): The finite element method for elliptic problems. North Holland.

[5] Göring, H., Roos, H.-C. and Tobiska, L. (2010): Finite-Elemente-Methode für Anfänger. 4. Auflage. Berlin, Wiley-VCH.

[6] Knabner, P. and Angermann, L. (2000): Numerik partieller Differentialgleichungen: eine anwendungsorientierte Einführung. Berlin, Springer-Verlag.

[7] Verfürth, V. (1996): A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart, Wiley-Teubner.