

# Компьютерная математика

## Академическая разница

Август 2015

---

### Процедура сдачи дисциплины

- Сдача допускается в одном из математических пакетов на ваш выбор (Mathematica, Matlab, Mathcad, Maple)
- Максимальное время сдачи 30 минут
- Для получения **зачета + минимального балла (4-5) по экзамену** нужно уверенно решать любую базовую задачу (может быть задано несколько)
- Для получения **зачета + более высокого балла (6-9)** по экзамену нужно дополнительно решить одну-две более сложные задачи
- Для получения **зачета + высшего балла (10)** нужно дополнительно ответить на теоретический вопрос
- Если вы сдавали «похожий» курс ранее, то можете получить **«автомат»** (зачет + 4 балла) — для этого нужно предоставить выписку из диплома и программу курса (ее вы можете взять в своем бывшем ВУЗе)
- Ниже приведен список ВУЗов и курсов, по которым выставляется «автомат» без предоставления программы (нужна только выписка из диплома):
  - Мехмат БГУ — Компьютерная математика
  - Мехмат БГУ — Вычислительные системы и сети
  - Мехмат БГУ — Информационные технологии
  - Физфак БГУ — Программирование и математическое моделирование
  - БГПУ им. М. Танка — Пакеты символьной математики

---

### Базовые задачи (4-5 баллов)

- Уметь записывать математическое выражение (арифметические операции, возведение в степень, извлечение корня, модуль, тригонометрические функции, логарифмы) и вычислять его при разных значениях переменных (в том числе подставлять значение переменной)
- Уметь записывать числа (в том числе комплексные и константы  $\pi$ ,  $e$ ), вычислять модуль, округлять
- Сгенерировать массив (список или матрицу) из случайных чисел в заданном диапазоне  $[a, b]$
- Получить любой элемент массива или найти его по заданному значению
- Найти элементы массива, которые удовлетворяют заданному условию

- Уметь производить операции над массивами (скалярное произведение, произведение матриц, взятие обратной матрицы, транспонирование)
- Уметь создавать простейшие функции (с параметрами и без), внутри которых используются локальные переменные, ветвления (if), циклы (for, while)
- Уметь строить график функции  $y = f(x)$  или поверхности  $z = f(x, y)$
- Уметь выводить несколько функций на один график
- Решать линейную систему (или матричное уравнение  $AX = B$ )
- Решать (численно) нелинейное уравнение  $f(x) = 0$ , т.е. находить все его корни
- Уметь вычислять производную функции (любого порядка)
- Интегрировать функцию (численно и аналитически, если возможно)
- Уметь упрощать математическое выражение

## Примеры задач посложнее (6-8 баллов)

**Важно:** Циклы for и while под запретом при решении задачи в *Mathematica* или Matlab, старайтесь решить задачу по-другому, например, используйте операции с массивами.

1. Сгенерируйте линейную систему из трех уравнений, выясните является ли она совместной и решите ее двумя разными способами.

2. Составьте матрицу вида 
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ \pi & \pi & \pi & 1 & 0 & 0 \\ \pi & \pi & \pi & 0 & 4 & 0 \\ \pi & \pi & \pi & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$
, состоящую из четырех подматриц, для

любого заданного размера подматрицы  $n$ .

3. В случайном списке найдите предпоследний положительный элемент.
4. В матрице определите что больше по модулю — среднее всех отрицательных или среднее всех положительных элементов?
5. Напишите функцию  $w(\text{flist})$ , которая для списка функций  $\text{flist} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  одной

переменной вычисляет их вронскиан, т.е. определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

6. Постройте график неявной функции (эллипс)  $x^2 - xy + y^2 = 1$ .

7. Покажите, что векторы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  образуют базис, и найдите координаты  $d$  в этом базисе.  
 $a = (4, 5, 2)$ ,  $b = (3, 0, 1)$ ,  $c = (-1, 4, 2)$ ,  $d = (5, 7, 8)$
8. Найти  $f(x)$ , если  $f\left(\frac{3x}{2x+1}\right) = \sin(x)$ .
9. Задайте  $x \in [-1, 1]$  и организуйте цикл расчета суммы ряда  $\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$  пока не будет достигнута точность  $10^{-6}$ . Выведите номер члена ряда, его значение и значение полученной суммы ряда.
10. Для функции, заданной параметрически,  $x = \ln(t)$ ,  $y = t^3$ , найдите значения первой и второй производных, а также постройте график.
11. Сгенерируйте случайный многочлен, имеющий 4 целых корня на отрезке  $[-10, 10]$ . Постройте совместный график многочлена и его корней.
12. При помощи формулы  $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N f(x_k) h$ , где отрезок  $[a, b]$  разбивается на  $N$  равных частей, а  $h = \frac{b-a}{N}$ , вычислите приближенное значение интеграла функции  $\frac{\sin(x)}{x^3+1}$  на отрезке  $[0, 2]$ . Сравните это значение с результатом интегрирования встроенной функцией.
13. Найдите функцию  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , если  $f(-2) = 3$ ,  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 0$ ,  $f(3) = -4$ . Изобразите график функции. Найдите значение  $f(1.5)$ .
14. Постройте график функции  $x^4 + y^4 = 8xy^2$  в полярной системе координат (предварительно получите уравнение этой кривой в полярных координатах).
15. Напишите функцию  $f(m, i, j)$ , которая находит  $(i, j)$ -минор матрицы  $m$  (т.е. определитель матрицы, полученный вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца).
16. При каких целых значениях параметров  $a, b, c, d$  многочлен  $x^4 + 3ax^3 + 3abx^2 - 2(a-b)x^2 - 4bx + 1$  будет являться квадратом другого многочлена?
17. Постройте на отрезке  $[0, 3]$  график функции  $\frac{\sin(x^2)}{x^2+1}$  и ее касательной в точке  $x = 1.3$ . Уравнение касательной в точке  $(x_0, y_0)$  имеет вид  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ .
18. Реализуйте вычисление значения  $\sqrt[n]{A}$  при помощи итерационной формулы  $x_0 = 1, x_{k+1} = \frac{1}{n} \left( (n-1)x_k + \frac{A}{x_k^{n-1}} \right)$ .
19. Для функции  $\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)}$  вычислите 5 последовательных приближений полиномом Тейлора в окрестности нуля. Постройте совместный график на отрезке  $[-2, 2]$ .
20. Проволокой, длина которой 1 м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму сектора круга. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

## Примеры задач еще посложнее (9 баллов)

**Важно:** Циклы `for` и `while` под запретом при решении задачи в *Mathematica* или *Matlab*, старайтесь решить задачу по-другому, например, используйте операции с массивами.

1. Для заданной прямой  $Ax + By + C = 0$  и точки  $(x_0, y_0)$  найдите уравнение нормали к прямой, проходящей через точку. Постройте совместный график прямой, точки и нормали.
2. Вычислите интеграл от функции  $\cos\left(\frac{12}{5x}\right)$  по промежутку между ее двумя крайними корнями, принадлежащими отрезку  $[0.2, 1]$ .
3. Для матрицы  $A$  решите относительно  $\lambda$  матричное уравнение  $\det(A - \lambda E) = 0$ . Найденные значения  $\lambda$  упорядочьте по убыванию абсолютного значения. Матрицу  $A$  сгенерируйте случайным образом.
4. Задайте два пересекающихся круга и найдите площадь их пересечения (найдите точки пересечения кругов, вычислите интеграл между точками). Постройте график.
5. Напишите функцию  $f(n)$ , которая для заданного  $n$  строит график  $\sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{2}{n} \sin(n t)$  на отрезке  $t \in [-10, 10]$ . Постройте интерактивный график, на котором можно изменять значение  $n$ , при этом график будет автоматически перестраиваться.
6. Сгенерируйте список случайных точек  $x, y \in [0, 4]$ . Оставьте в списке только те точки, которые попали внутрь фигуры, ограниченной кривыми  $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$  и  $y = 2\sqrt{x}$ . Постройте график этих точек.
7. Напишите функцию  $f(a)$ , которая для заданного списка  $a$  находит число повторений каждого элемента. Результат выведите в виде  $\{\{\text{элемент, кол} - \text{во}\}, \{\text{элемент, кол} - \text{во}\}, \dots\}$ . Сравните результат с работой встроенной функции Tally.
8. Задайте множество случайно распределённых на плоскости точек. Найдите диаметр этого множества, т.е. максимальное расстояние между двумя точками из множества. Изобразите на графике точки множества и линию диаметра.
9. Изобразите шахматную доску  $8 \times 8$ , состоящую из чередующихся черных и белых квадратов.
10. Проверьте гипотезу, что среди всех первых цифр чисел вида  $2^n$  чаще всего встречается единица. Постройте гистограмму распределения первых цифр для  $n = 0 \dots 1000$ .

## Теоретические вопросы (10 баллов)

- Символьные и приближенные вычисления (*Mathematica*, Mathcad)
- Работа со списками и матрицами
- Создание собственных функций и программ
- Двумерная и трехмерная графика
- “Примитивная” графика (*Mathematica*), дескрипторная графика (Matlab)
- Интерактивная графика (*Mathematica*)
- Создание анимаций
- Анонимные функции (*Mathematica*, Matlab)
- Локальные и глобальные правила преобразований, шаблоны (*Mathematica*)

- Функциональное программирование (*Mathematica*)